

(1) 解析に使用した理論・公式集

第IV編 理論編

ここでは、「土留丸」における土／水連成解析が可能な FEM の理論をまとめています。

1. 陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた土／水連成解析¹⁾

1.1. 支配方程式と境界条件

地盤の変形挙動を考える際、地盤を土粒子からなる骨格(以下、土骨格と呼ぶ)(固体)と、その中に含まれている間隙水(液体)、気泡(気体)の混合体として考えるのが一般的かつ合理的な手法であろう²⁾。しかし、ここでの目的は土質力学で通常用いられている有効応力の原理に従う土／水連成数値解析の精度向上と計算時間の短縮にあるので、間隙は水で完全飽和であり、有効応力を仮定する2相混合体として取り扱う。また、その間隙水は非圧縮性であると仮定する。この単純化された2相混合体に対する準静的な場合の支配方程式は以下の6つの式で表される。

$$\text{準静的なつりあい式: } \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \boldsymbol{\ell}, \quad (1.1.1)$$

$$\text{土骨格部分の弾塑性構成式: } \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}^{ep} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.1.2)$$

$$\text{ひずみ変位関係式: } \boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S, \quad (1.1.3)$$

$$\text{有効応力の原理: } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - p_w \mathbf{1}, \quad (1.1.4)$$

$$\text{連続式: } \operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \operatorname{div}(\mathbf{v}_w) = 0, \quad (1.1.5)$$

$$\text{間隙水の流動則(ダルシー則): } \mathbf{v}_w = -\mathbf{K}_p \operatorname{grad}(h). \quad (1.1.6)$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}$ は全応力テンソル、 \mathbf{b} は物体力ベクトル、 $\boldsymbol{\sigma}'$ は有効応力テンソル、 \mathbf{C}^{ep} は弾塑性構成テンソル、 $\mathbf{1}$ ($(\mathbf{1})_{ij} = \delta_{ij}$) はクロネッカーのデルタ、 \mathbf{v}_w は間隙水の流束ベクトル(土骨格に対する相対速度)、 \mathbf{K}_p は透水係数テンソルであり、上付きの \mathbf{s} は () 内のテンソルの対称部分であることを表している。 h は全水頭を表しており、 γ_w を間隙水の単位体積重量、 z を位置水頭とすると

$$h = \frac{p_w}{\gamma_w} + z \quad (1.1.7)$$

の関係がある。また、土骨格部分(正確には混合体全体の変形に対する境界条件)、間隙水圧(全水頭)に対してそれぞれ境界条件が課されており、土骨格に対する境界条件は

$$\text{Neumann 境界: } \bar{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad \text{on } S_\sigma, \quad (1.1.8)$$

$$\text{Dirichlet 境界: } \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \quad \text{on } S_u, \quad (1.1.9)$$

である。ここで記号の上の $\bar{\quad}$ は既知量であることを表しており、 S_σ は応力速度既知の境界、 S_u は変位速度既知の境界であり、土骨格部分に対する全境界を S とすると

$$S \supset S_\sigma, \quad S \supset S_u, \quad \phi = S_\sigma \cap S_u, \quad (1.1.10)$$

と仮定する。 \mathbf{n} は S 上の単位法線ベクトルである。

全水頭に対する境界条件は

$$\text{Neumann 境界: } \bar{q} = \mathbf{v}_w \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } S_q, \quad (1.1.11)$$

$$\text{Dirichlet 境界: } \bar{h} = h \quad \text{on } S_h. \quad (1.1.12)$$

である。 q は単位時間あたりの流出入量、 S_q は流量既知の境界、 S_h は水頭既知の境界である。水頭に対する全境界を S とすると

$$S \supset S_q, \quad S \supset S_h, \quad \phi = S_q \cap S_h, \quad (1.1.13)$$

である。

1.2. 弱形式化と有限要素法離散化

以下のような試験関数を定義する。

$$\delta \mathbf{u} := \{ \delta \mathbf{u} \mid \delta \boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \delta \mathbf{u})^S, \delta \mathbf{u} = 0 \text{ on } S_u \} \quad (1.2.1)$$

この試験関数をつりあい式(1.1.1)の速度型に掛け合わせ Gauss の発散定理と変形に対する力の境界条件(1.1.8)、有効応力の原理(1.1.4)を用いるとつりあい式の弱形式が得られる:

$$\int_V (\boldsymbol{\sigma}' - p_w \mathbf{1}) \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dv + \int_V \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv - \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds = 0. \quad (1.2.2)$$

次にもう一つの試験関数を定義する。

$$\delta h := \{ \delta h \mid \delta h = 0 \text{ on } S_h \} \quad (1.2.3)$$

連続式(1.1.5)に掛け合わせ、Gauss の発散定理と流量既知の境界条件(1.1.10)を用いることにより、次のような連続式の弱形式が得られる:

$$\int_V \{ \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \delta h - \mathbf{v}_w \cdot \mathbf{grad}(\delta h) \} \, dv = - \int_{S_q} \bar{q} \delta h \, ds. \quad (1.2.4)$$

この2つの弱形式を有限要素法定式化するため空間的離散化を行う。節点変位を \mathbf{d} 、節点水頭を \mathbf{h} とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N} \mathbf{d}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla \mathbf{N} \mathbf{d} = \mathbf{B} \mathbf{d}, \\ \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) &= \dot{\mathbf{I}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{b}_v^T \dot{\mathbf{d}}, \\ h &= \mathbf{n}_h^T \mathbf{h}, \\ \mathbf{grad}(h) &= \mathbf{B}_h \mathbf{h}, \\ \mathbf{v}_w &= -\mathbf{K}_p \mathbf{B}_h \mathbf{h}, \\ p_w &= \gamma_w (h - z), \\ &= \gamma_w \mathbf{n}_h^T (\mathbf{h} - \mathbf{z}). \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

ここで \mathbf{N} は変位に対する内挿関数であり、 \mathbf{n}_h は水頭に対する内挿関数である。試験関数に対しても同様の離散化が行えると仮定すると

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} &= \mathbf{N} \delta \mathbf{d}, \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B} \delta \mathbf{d}, \\ \delta h &= \mathbf{n}_h^T \delta \mathbf{h}, \\ \mathbf{grad}(\delta h) &= \mathbf{B}_h \delta \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

となる。なおここで空間的離散化を行った(1.2.5)式以降、有限要素法定式化の慣例に従い、表記は変えていないが応力、ひずみはベクトル化、構成テンソルはマトリクス化されていることに注意する。したがって、上付きの T は転置行列を意味する。(1.2.5)、(1.2.6)の関係を(1.2.2)、(1.2.4)に代入し整理すると:

$$\mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{d}) dv - \gamma_w \mathbf{K}_v^T (\mathbf{h} - \mathbf{z}) = \mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} ds - \mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dv, \quad (1.2.7)$$

$$\mathbf{K}_v \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_h \mathbf{h} = - \mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{n}_h \bar{q} ds \quad (1.2.8)$$

が得られる。ここで

$$\mathbf{K}_v = \mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{n}_h \mathbf{b}_v^T dv \quad (1.2.9)$$

$$\mathbf{K}_h = \mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{B}_h^T \mathbf{K}_p \mathbf{B}_h dv \quad (1.2.10)$$

であり、 \mathbf{A} は assembly operator と呼ばれ全要素数 ne の数だけ重ね合わせる事を意味する。 \mathbf{K}_p は透水係数マトリクスであり、間隙水の浸透における異方性を考える場合、

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (1.2.11)$$

と表せる。 k_x 、 k_y 、 k_z はそれぞれ x 、 y 、 z 方向の透水係数である。

式(1.2.7)、(1.2.8)の左辺を内力ベクトル、右辺を外力ベクトルと呼び、

$$\mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{d}, \mathbf{h}) = \mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{d}) dv - \gamma_w \mathbf{K}_v^T (\mathbf{h} - \mathbf{z}), \quad (1.2.12)$$

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} ds - \mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dv, \quad (1.2.13)$$

$$\mathbf{G}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{h}) = \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_h \mathbf{h}, \quad (1.2.14)$$

$$\mathbf{G}^{\text{ext}} = - \mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{n}_h \bar{q} ds, \quad (1.2.15)$$

と表すと、最終的には土/水連成有限要素法定式化は節点における離散化された変位 \mathbf{d} 、変位速度 $\dot{\mathbf{d}}$ と間隙水圧 \mathbf{h} を未知とする非線形連立方程式に帰着される：

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{d}, \mathbf{h}) = \mathbf{0}, \quad (1.2.16)$$

$$\mathbf{G}^{\text{ext}} - \mathbf{G}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{h}) = \mathbf{0}. \quad (1.2.17)$$

1.3. Newton Raphson 法に整合する土/水連成解析の定式化

式(1.2.16)、(1.2.17)には速度型の物理量と、現在の物理量が混在しているので時間に関して離散化(差分)を行う。

対象としている時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ において物理量 ψ が線形に変化すると仮定すると、

$$\psi = (1-\theta)\psi_n + \theta\psi_{n+1}, \quad (1.3.1)$$

$$\dot{\psi} = (\psi_{n+1} - \psi_n) / \Delta t, \quad (1.3.2)$$

と表せる。ここで、下付き添え字 $n, n+1$ はそれぞれ時刻 t_n, t_{n+1} での物理量であることを表している。このパラメータ θ を0とした時を陽解法近似、1とした時を陰解法近似という。なお、陰解法弾塑性計算アルゴリズムとは、この θ を1としたことのみでないことに注意する。

その大きな違いは土骨格部分の弾塑性体に対する応力計算法の違いにある。従来、汎用されている土/水連成解析においては、この時間差分に関しては θ を1とし陰解法的に取り扱っているが、弾塑性構成式に関しては、単に陽解法増分解析を行っているものがほとんどであり、求めた応力が降伏面上に正確に乗っていないなどの欠点があった。この降伏面上にない応力を降伏面に戻す操作を Return Mapping と呼ぶが、Simo らは陰解法 Return Mapping として Algorithmic tangential moduli を用いた General return mapping algorithms を用いた弾塑性構成式を陰解法で解く方法を提案している³⁾。地盤材料においては Borja ら⁴⁾が修正 Cam-clay モデルを用いた陰解法弾塑性計算を提案している。しかし、彼らは土骨格のみを対象とした解析であり、間隙水については考慮していない。本プログラムでは地盤材料の解析に汎用される土/水連成解析に、陰解法弾塑性計算アルゴリズムを整合するように組み込み、2次収束が保証され、理論解のある問題においては高精度であることを用いた¹⁾。

今、時刻 t_n で式(1.2.16)、(1.2.17)を満足しており、時刻 t_{n+1} で満足する解を Newton Raphson 法に整合するよう求めることを考え、式(1.2.16)、(1.2.17)を Taylor 展開し、節点変位増分 $\Delta \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}$ 、および、節点水頭増分 $\Delta \mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{h}_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{h}_{n+1}^{(k)}$ に関する線形化近似を行う。ここで、各物理量の下付き添え字 n は荷重ステップ数、上付き添え字 (k) は各増分ステップ内のイテレーション回数を表している。 $\theta = 1$ として式(1.3.1)、(1.3.2)を式(1.2.16)、(1.2.17)に用いると：

$$\mathbf{F}^{ext} \Big|_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)}, \mathbf{h}_{n+1}^{(k+1)}) = \mathbf{0}, \quad (1.3.3)$$

$$\mathbf{G}^{ext} \Big|_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{G}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)}, \mathbf{h}_{n+1}^{(k+1)}) = \mathbf{0} \quad (1.3.4)$$

次に式(1.3.3)における内力ベクトルを $\Delta \mathbf{d}$ と $\Delta \mathbf{h}$ の一次の項まで Taylor 展開すると：

$$\mathbf{F}^{int} \Big|_{n+1}^{(k+1)} \approx \mathbf{F}^{int} \Big|_{n+1}^{(k)} + \frac{\partial \mathbf{F}^{int} \Big|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} \Delta \mathbf{d}_{n+1} - \frac{\partial \mathbf{F}^{int} \Big|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{h}_{n+1}^{(k)}} \Delta \mathbf{h}_{n+1}, \quad (1.3.5)$$

となる。上式、右辺第2項および第3項は assembly operator \mathbf{A} が線形であることに注意すれば微分の chain rule を用いて以下のようになる：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}^{int} \Big|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} \Delta \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{A} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \sigma'(\mathbf{d}_{n+1}^{(k)})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} dv \Delta \mathbf{d}_{n+1}, \\ &= \mathbf{A} \left[\int_{V_e} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^{ep} \mathbf{B} dv \right] \Delta \mathbf{d}_{n+1}, \\ &= \mathbf{K}_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{h}_{n+1}^{(k)}} \Delta \mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{K}_v^T \Delta \mathbf{h}_{n+1} \quad (1.3.7)$$

ここで式(1.3.6)中の $\bar{\mathbf{C}}^{ep(k)} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} \right]$ は、式(1.3.3)を Newton Raphson 法で解く場合、それに整合した Consistent 弾塑性構成テンソルであり、一次元の場合を除き、一般には式(1.1.2)の (Continuum) 弾塑性構成テンソル \mathbf{C}^{ep} とは一致しない。

同様に式(1.3.4)を Taylor 展開し、微分の連鎖則を用いれば、

$$\mathbf{G}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k+1)} \approx \mathbf{G}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)} + \frac{\partial \mathbf{G}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} \Delta \mathbf{d}_{n+1} - \frac{\partial \mathbf{G}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{h}_{n+1}^{(k)}} \Delta \mathbf{h}_{n+1}, \quad (1.3.8)$$

となり、既知な量と未知な量を分離し、マトリクス表示すると、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} & -\frac{\partial \mathbf{F}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{h}_{n+1}^{(k)}} \\ \frac{\partial \mathbf{G}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} & \frac{\partial \mathbf{G}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{h}_{n+1}^{(k)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{d}_{n+1} \\ \Delta \mathbf{h}_{n+1} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)} - \mathbf{F}^{\text{ext}}|_{n+1} \\ \mathbf{G}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)} - \mathbf{G}^{\text{ext}}|_{n+1} \end{Bmatrix}, \quad (1.3.9)$$

となる。以上から上式(1.3.9)は離散化された \mathbf{d} と \mathbf{h} の非線形連立方程式、式(1.3.3)と式(1.3.4)を解く Newton Raphson 法に整合していることが分かる。

1.4. Trial elastic state と弾塑性判定

時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ の増分弾塑性初期値境界値問題を考え、時刻 t_n の時の $\{\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\sigma}'_n, (p_c)_n\}$ が既知であると仮定する。今、与えられた $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ に対して trial elastic state は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} &:= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n, \\ \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}{}^{\text{trial}} &:= \boldsymbol{\sigma}'_n + \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}, \\ (p_c)_{n+1}{}^{\text{trial}} &:= (p_c)_n. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

上式より試行平均応力、試行一般化偏差応力、試行偏差応力は

$$\begin{aligned} p_{n+1}{}^{\text{trial}} &= -\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}{}^{\text{trial}}), \\ q_{n+1}{}^{\text{trial}} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S}_{n+1}{}^{\text{trial}}\|, \\ \mathbf{S}_{n+1}{}^{\text{trial}} &= \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}{}^{\text{trial}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}{}^{\text{trial}}) \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

と表される。

負荷除荷判定は、離散化 Kuhn-Tucker 条件により

$$f_{n+1}{}^{\text{trial}} \begin{cases} \leq 0 & \Rightarrow \text{elastic step} \quad \Delta \phi = 0, \\ > 0 & \Rightarrow \text{plastic step} \quad \Delta \phi > 0. \end{cases} \quad (1.4.3)$$

で行われ、ここで Drucker Prager 弾塑性モデルの場合は

$$f_{n+1}{}^{\text{trial}} = \|\mathbf{S}_{n+1}{}^{\text{trial}}\| - \beta p_{n+1}{}^{\text{trial}} - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_Y + H \bar{\varepsilon}_n^p), \quad (1.4.4)$$

であり、Cam Clay 弾塑性モデルの場合は

$$f_{n+1}^{trial} = q_{n+1}^{trial} + M p_{n+1}^{trial} \ln \left(\frac{p_{n+1}^{trial}}{(p_c)_n} \right), \quad (1.4.4)$$

である。

1.5. 初期地下水位の設定

全水頭 h 、間隙水圧 p_w 、間隙水の単位体積重量 γ_w 、位置水頭 z の間には、以下の関係がある。

$$h = \frac{p_w}{\gamma_w} + z \quad (1.1.7 \text{ 再})$$

飽和地盤の場合、これを図示すると図1-1のようになる。この全水頭が一定であるということは、式(1.1.6)のダルシー則からも深さ方向に流れが起きないことを表している。

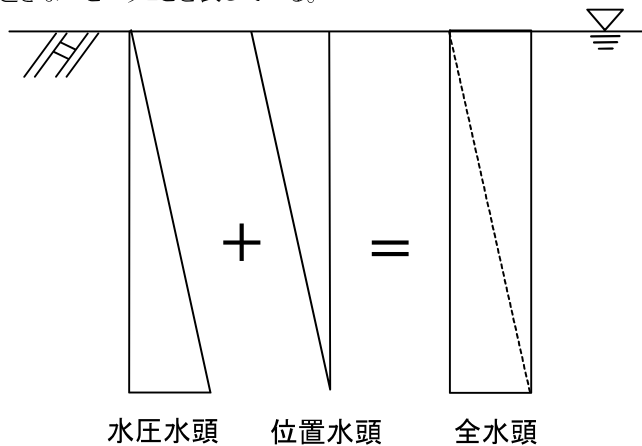


図1-1 飽和地盤の場合の全水頭

通常の地盤は地表面まで飽和していることは稀であり、何らかの地下水面、すなわち、ここでは飽和領域と不飽和領域の境というものを考えなければならない。しかし土/水連成解析は、その定式化より飽和地盤を対象としたもので、それを不飽和地盤に拡張するには幾つかの方法が考えられる。

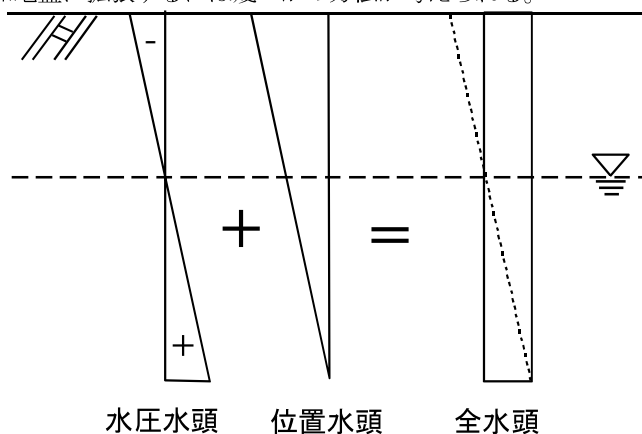


図1-2 不飽和地盤の水圧, 位置水頭, 全水頭

最も単純に考えられるのは、図1-2のように全水頭を一定とする為に、間隙水圧に負圧を設定する方法である。しかしこの方法では地下水位が深い場合、大きな負圧が発生してしまい、そこから計算される掘削解放力に大きな影響を与えるなどの問題があった。

そこでバージョン 2.02 から図1-3のような初期水圧の設定を自動で行っている。すなわち、不飽和領域で間隙水圧をゼロとするため、位置水頭を地下水位面での位置水頭で一定にし、全水頭一定を実現している。

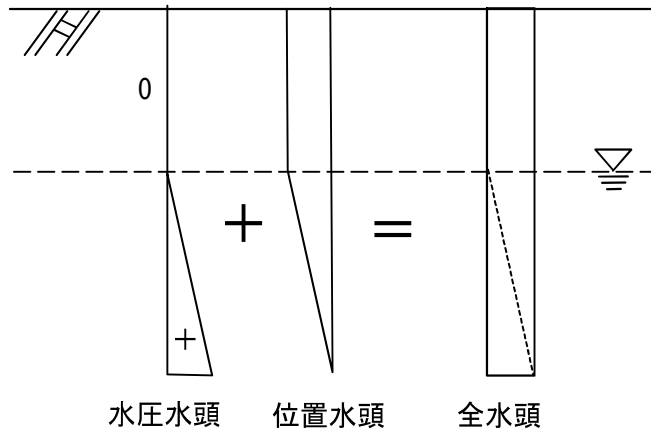


図1-3 不飽和地盤の水圧, 位置水頭, 全水頭

2. 要素ライブラリ

2次元土/水連成有限要素法解析には四角形要素として、4CST要素や8 or 9節点アイソパラメトリック要素などが採用され、三角形要素としては6節点アイソパラメトリック要素が汎用される。これらアイソパラメトリック要素などの高次な要素が用いられる理由はアウグラスや rocking などの擬似変形モードを防ぐ目的であり、変位は2次の形状関数で近似し、間隙水圧は1次オーダーを少なくすると良いといわれている⁵⁾。本プログラムにおいては変位に関しては8節点四角形要素もしくは6節点三角形要素、間隙水圧に関しては4節点四角形要素もしくは3節点三角形要素を用いている。

2.1. 4節点および8節点四辺形アイソパラメトリック要素

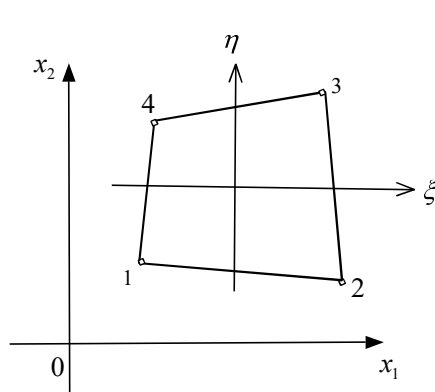


図2-1 4節点四辺形要素

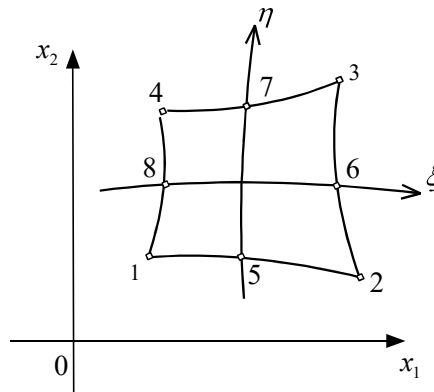


図2-2 8節点四辺形要素

図2-1に示すような任意の矩形要素を考え、左下の頂点より始めて、反時計方向に順次1、2、3、4の節点番号を付ける。この要素の形状は次式で表現される。

(8×1)

このように要素内の変位分布を表す内挿関数を、要素の形状を表す関数 N_i と同じ物を使用する要素をアイソパラメトリック要素と呼ぶ。

ひずみの離散式は次式ようになる：

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\}. \quad (2.1.6)$$

このひずみベクトルを2次元問題において成分表示すると、

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.1.7)$$

となり、(2.1.5) の関係を用いると

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \dots \end{bmatrix}}_{[B] \text{ マトリクス}} \begin{Bmatrix} d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_1^2 \\ d_2^2 \\ d_1^3 \\ d_2^3 \\ d_1^4 \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad (2.1.8)$$

となる。この $[B]$ マトリクスを作成する為には、形状関数 N_i の x_1 、 x_2 に関する微分形 $\partial N_i / x_1$ 、 $\partial N_i / x_2$ を計算する必要がある。 N_i は ξ 、 η の関数であり、また x_1 、 x_2 も ξ 、 η の関数であるから次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

これをマトリクス表示すると

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix}, \quad (2.1.10)$$

となる。上式の最左辺は N_i が ξ 、 η の関数であることから陽に求められる。また、ここで、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_{1i}, & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_{2i}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_{1i}, & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_{2i}. \end{aligned} \right\}, \quad (2.1.11)$$

であることから、マトリクス $[J]$ も局所座標によって陽に表される。 $[J]$ マトリクスはJacobiのマトリクスとして知られている。よって最終的に、

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad (2.1.12)$$

と $[B]$ マトリクスの各成分を求めることができる。

応力は構成マトリクス $[C]$ を用いて

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.1.13)$$

と表すことができ、

$$dx_1 dx_2 = \det[J] d\xi d\eta, \quad (2.1.14)$$

という関係を用いれば、剛性マトリクスは

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \int_{V_e} [B]^T [C] [B] dx_1 dx_2, \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [C] [B(\xi, \eta)] \det[J] d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

と表すことができる。

2.2. 3節点および6節点三角形アイソパラメトリック要素

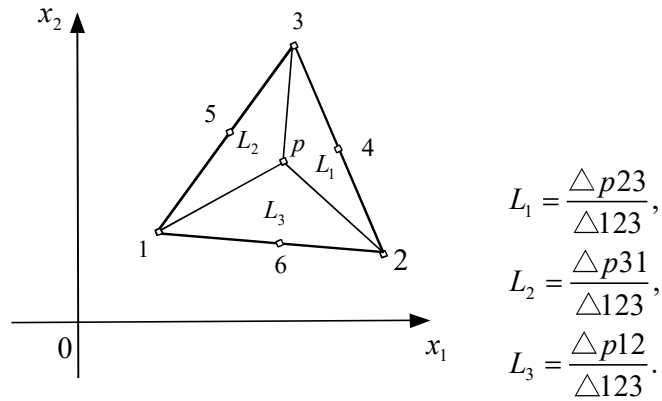


図 2-3 6節点三角形要素

図2-3に示すような任意の三角形要素を考え、左下の頂点より始めて、反時計方向に順次1、2、3、また中間節点として4、5、6の節点番号を付ける。この要素の形状関数は図2-3に示すような面積座標 L_1 、 L_2 、 L_3 を用いて次式で表現される:

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(2L_1 - 1), & N_4 &= 4L_2L_3, \\ N_2 &= L_2(2L_2 - 1), & N_5 &= 4L_3L_1, \\ N_3 &= L_3(2L_3 - 1), & N_6 &= 4L_1L_2. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

また3節点三角形要素の場合は

$$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3, \quad (2.2.2)$$

となる。

ここで $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ を利用し、 ξ 、 η を用いて:

$$\begin{aligned} L_1 &= \xi, \\ L_2 &= \eta, \\ L_3 &= 1 - \xi - \eta, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

のような変数変換を行うと、前節における四角形要素と同様に剛性マトリクスの作成法がそのまま利用できる。ちなみに形状関数の局所座標での偏微分は:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3}, \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3}, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

のように変換される。

3. 構成則ライブラリ

3.1. 弾性体モデル

3.1.1. 弾性体モデルの構成テンソル

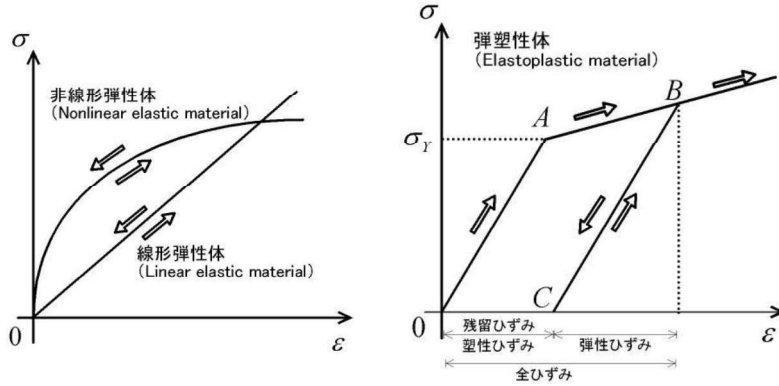


図3-1 弾性体

図3-2 弾塑性体

構成式とは物質の力学的性質を表すものであり、応力-ひずみ関係式で表される。代表的な挙動に弾性挙動、塑性挙動、粘性挙動などがある。実際の物質の挙動をモデル化するために、弾性体、弾塑性体などがよく用いられており、弾性体、弾塑性体の挙動を1次的に模式的に表したものが図3-1、図3-2である。

弾性体 (Elastic material) の特徴は、図3-1に示すように、外力を取り去った際に完全に変形前の状態に戻る (応力ひずみ関係でいうと原点に戻る) ということである。ひずみ速度依存性、時間依存性のいずれも無く、ひずみは負荷速度、載荷履歴によらず現在の応力によって決まり、また静荷重の下で応力を長時間一定に保っておいてもひずみは変化しない。Hooke の法則に従い応力とひずみの関係が線形なものを線形弾性体 (Linear elastic material)、それ以外を非線形弾性体 (Nonlinear elastic material) と呼ぶ。

線形弾性体の構成式は:

$$\sigma_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3.1.1.1)$$

で表される。ここで \mathbf{C}_{ijkl} は4階の弾性構成テンソルであり、ラメの定数 (Lame's constants) λ 、 μ を用いて:

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (3.1.1.2)$$

と表される。これを式(3.1.1.1)に代入すると、線形弾性体に対する構成式は次式のようにも表すことができる:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (3.1.1.3)$$

ラメの定数とヤング率 E 、ポアソン比 ν の関係は:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (3.1.1.4)$$

のように与えられ、これを(3.1.1.3)に用いて各成分を表すと:

$$\sigma_{11} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right], \quad \sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{12}, \quad (3.1.1.5a,b)$$

$$\sigma_{22} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}) \right], \quad \sigma_{23} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{23}, \quad (3.1.1.5c,d)$$

$$\sigma_{33} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right], \quad \sigma_{31} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{31}, \quad (3.1.1.5e,f)$$

となる。ここで平面ひずみの場合は、式(3.1.1.5a)、(3.1.1.5c)、(3.1.1.5e)へ $\varepsilon_{33} = 0$ を代入し、マトリクス表示することにより：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.1.1.6)$$

となり、点線内が平面ひずみ状態の **[C]** マトリクスである。

3.1.2. 弾性体モデルの入力値

通常、軟弱地盤上に盛土等を構築する場合、設計のために用意されている土質試験は、標準圧密試験と一軸圧縮試験であることが多いので、これらの結果からパラメータを推定する方法を述べる。当然、複雑な地盤の挙動をたった2つのパラメータで表現するわけであるから、その決定にはかなり高度な工学的判断が必要となり利用者に任せられている。

① 弾性係数

一軸圧縮試験は初期せん断力を無視しているため、実際の応力-ひずみ関係とはかなり異なるうえ、弾性係数として接線係数を採る方法と、割線係数を採る方法により弾性係数の数値が異なるが、一般には E_{50} が用いられる。ただし、一軸圧縮試験は非排水状態で行われるので E_{50} は全応力に対する弾性係数であり、有効応力に対する弾性係数に換算する必要がある。せん断弾性定数 $G = E/2(1+\nu)$ は体積変化に無関係であるので、間隙水圧の存在の有無に関わらず有効応力に対する値と全応力に対する値とは同じである。また、全応力に対する非排水状態でのポアソン比 $\bar{\nu}$ は 0.5 である。以上のことから、次の関係が成立する。

$$E = E_{50}(1+\nu)/1.5 \quad (3.1.2.1)$$

一方、圧密試験から得られる体積圧縮係数 m_v を用いて弾性係数を推定することも可能である。平面ひずみ状態を仮定した場合、 E と m_v には次の関係が成立する。

$$E = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \cdot \frac{1}{m_v} \quad (3.1.2.2)$$

ただし、 m_v も当然のことながら応力に依存し、どの応力レベルの m_v を採るかが問題である。応力変動による m_v の変動が小さい場合には、初期土被り圧 p_0 に対する m_v を用いればよいが、変動が大きい場合には盛土載荷重を考慮して決定しなければならない。

粘性土の場合、標準圧密試験の $e-p$ 曲線の初期の直線部の傾きより体積圧縮係数 m_v を求め、この m_v とポアソン比 ν から、初期弾性係数 E_0 を算定する場合が多い。また膨潤指数 κ 、平均有効主応力 p_0 、初期間隙比 e_0 およびポアソン比 ν から、

$$E_0 = \frac{3(1+e_0)(1-2\nu)}{\kappa} p \quad (3.1.2.3)$$

によって求める方法もある。

砂質土の場合、通常プレッシャーメータの測定値 E_s を用いるが、測定値がない場合は N 値より推定することも多い。

② ポアソン比

有効応力に対するポアソン比を直接測定することは難しいが、静止土圧係数 K_0 と、 $K_0 = \nu/(1-\nu)$ の関係がある。 K_0 は K_0 圧密試験から求められるが、 $\nu = 1/3$ 程度を採用する場合が多い。また荒井ら⁶⁾の逆解析結果も $\nu = 0.3$ 近傍を示している。

③ 透水係数

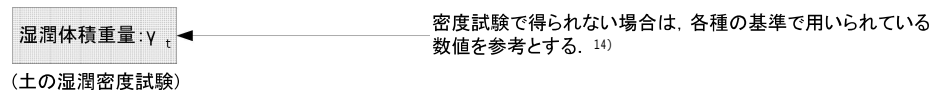
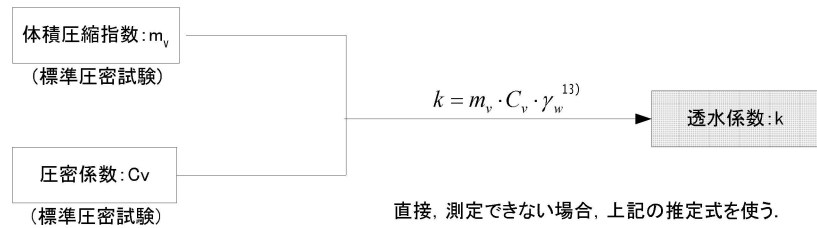
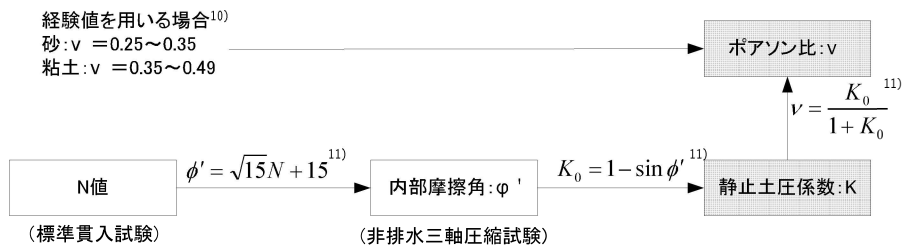
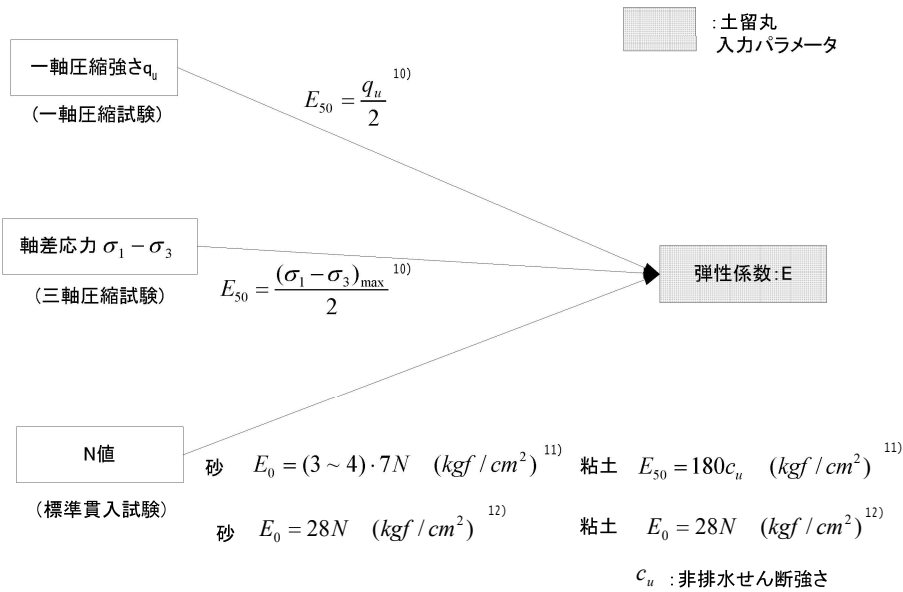
透水係数とは、土中の水の透水性を示すものである。値が小さいほど水を透し難く、値が大きいほど水を透し易い。

圧密試験から透水係数と荷重の関係が得られるが、一般に荷重の増加につれ透水係数が小さくなる。特に、先行圧密圧力より大きい応力、すなわち正規圧密状態に入ると、急激に小さくなるため、 m_v と同様の検討が必要である。また、このようにして得られた透水係数を用いて予測した圧密速度は実際のそれと比べて遅く、5~10 倍しなければならないという報告^{7), 8), 9)}が多い。さらに、水平方向の透水性は水力方向のそれよりも 10 倍程度大きく採って補正している例もある。

透水係数を求める方法には、直接測定する方法、間接的に推定する方法がある。透水係数の目安を以下に示す。

透水係数(cm/sec)											
	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^{+1}
透水性	実質上不透水		非常に低い	低い	中位		高い				
土の種類	粘性土		微細砂, シルト, 砂-シルト-粘土混合土				砂及び礫		清浄な礫		
直接測定する方法	特殊な変水位透水試験		変水位透水試験				特殊な変水位透水試験				
間接的に推定する方法	圧密試験から計算		なし				清浄な砂と礫は粒度と間隙比から計算				

以上のように、複雑な地盤の挙動を3つのパラメータで表現するわけであるから、高度な工学的判断が必要であり、他にも各種指針等で提案されているものもある。推奨する土留丸入力パラメータ決定フローを以下に示す。



3.2. Drucker Prager 弾塑性モデル

3.2.1. Drucker Prager 弾塑性モデルの降伏関数

地盤を Drucker Prager 弾塑性モデルの降伏条件にしたがうバイリニア型の弾塑性体と仮定し、関連流れ則を仮定する。その時の Drucker Prager 弾塑性モデルの降伏関数は以下で与えられる。

$$f = \|\mathbf{S}\| - \beta p - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_Y + H\bar{e}^p) = 0, \quad (3.2.1.1)$$

ここで \mathbf{S} は偏差応力、 p は平均応力であり、

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{1}, \quad (3.2.1.2)$$

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (3.2.1.3)$$

である。また σ_Y は降伏応力、 H は硬化・軟化係数、 \bar{e}^p は相当塑性ひずみである。

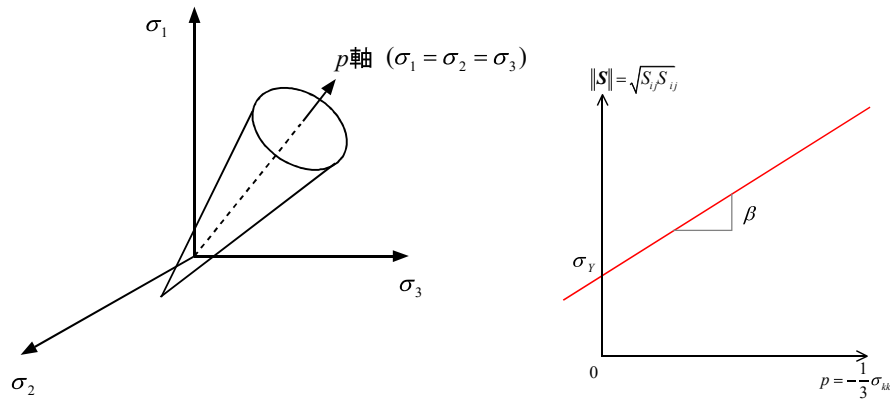


図3-3 Drucker Prager 弾塑性モデルの降伏関数

この Drucker Prager 式は、図3-3のような主応力空間では静水圧軸 ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ の軸) を中心軸を持つ円錐となる。このパラメータ β 、 σ_Y は主に土の強度に関係があり、特定の条件を与えることにより Mohr-Coulomb 式の c 、 ϕ と関連付けることができる^{15)・16)}。その方法によると $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$ の条件下 (三軸圧縮試験での応力状態に相当) で c 、 ϕ を決定した場合、

$$\beta = \frac{2\sqrt{6} \sin \phi}{3 - \sin \phi}, \quad \sigma_Y = \frac{6c \cos \phi}{3 - \sin \phi}, \quad (3.2.1.4)$$

であり、 $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ の条件下 (三軸伸張試験での応力状態に相当) で c 、 ϕ を決定した場合、

$$\beta = \frac{2\sqrt{6} \sin \phi}{3 + \sin \phi}, \quad \sigma_Y = \frac{6c \cos \phi}{3 + \sin \phi}, \quad (3.2.1.5)$$

で関連付けられる。

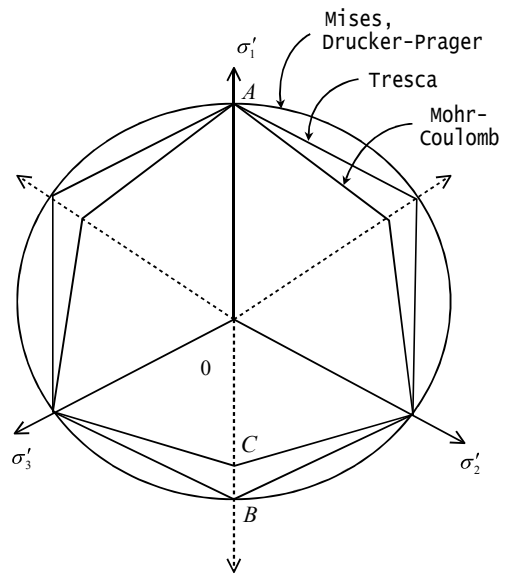


図3-4 π 平面上での Drucker Prager モデルと Mohr-Coulomb モデルの降伏曲面

3.2.2. Drucker Prager 弾塑性モデルの局所安全率

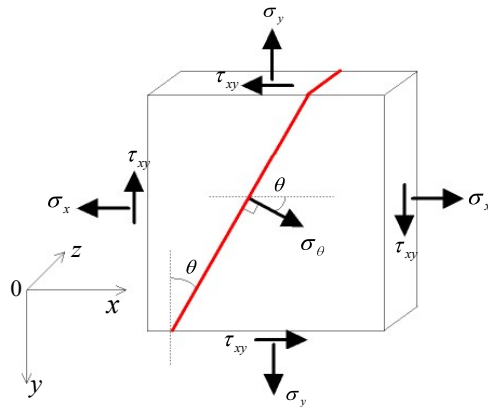


図3-5 主応力面

図3-5に示す2次元平面において応力成分 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} が既知であり、 $\sigma_z (= (\sigma_x + \sigma_y)/2)$ が中間主応力であるとする、Mohr の応力円を用いて最大・最小主応力は次式で得られる。

最大主応力は

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.2.2.1)$$

であり、最小主応力は

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.2.2.2)$$

である。なお、ここですべての応力は引張りが正であると仮定する。すなわち、両主応力が圧縮側にある時考えると最小主応力の方が絶対値は大きくなることに注意が必要である。

主応力面は

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right), \text{ または, } \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}, \quad (3.2.2.3)$$

であるので、この α_1 、 α_2 をそれぞれある面の垂直応力の公式:

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \quad (3.2.2.4)$$

に代入し、最大主応力に一致する方を最大主応力面とする。ここで θ は、ある面の法線ベクトルと x 軸の間の角度である。

平均応力 $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ が一定で、単純せん断により破壊したと考える。この時、局所安全率は次式で与えられる。

$$F_s = \frac{D_{\min} + (\sigma_1 - \sigma_3)/2}{(\sigma_1 - \sigma_3)/2} = \frac{2c \cos \phi + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad (3.2.2.5)$$

ここに c は粘着力、 ϕ は内部摩擦角である。また D_{\min} は図3-6に示すようなモールの円と破壊包絡線との接近度を表し、次式で与えられる:

$$D_{\min} = c \cos \phi + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (3.2.2.6)$$

なお、ここで主応力は圧縮が正となっているので注意が必要である。

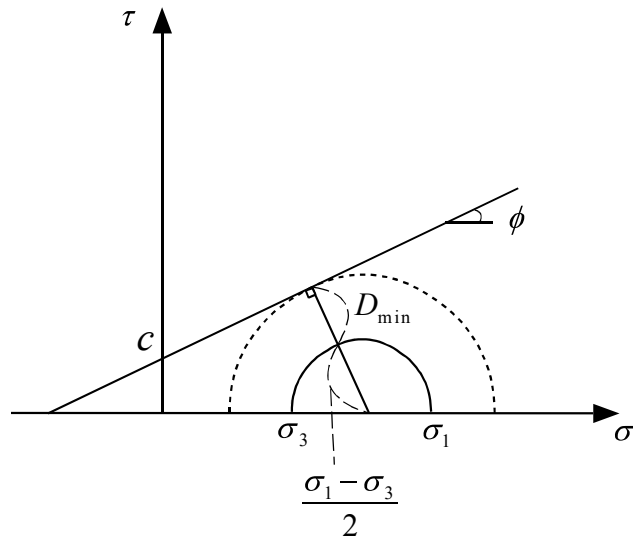


図3-6 Drucker Prager モデルの局所安全率の概念図

3.2.3. Scalar consistency parameterの決定

応力のような内部変数 r を考え、

$$r = -H\bar{e}^p, \quad (3.2.3.1)$$

とすると、降伏関数(3.2.1.1)は

$$f = \|\mathbf{S}\| - \beta p - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y - r) = 0, \quad (3.2.3.2)$$

となる。これより流れ則は:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \gamma \left(\frac{\partial \|\mathbf{S}\|}{\partial \mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \beta \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = \gamma \left(\hat{\mathbf{n}} - \frac{\beta}{3} \mathbf{I} \right), \quad (3.2.3.3)$$

となり、硬化則は:

$$\dot{\bar{e}}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial r} = \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma, \quad (3.2.3.4)$$

となる。この流れ則と硬化則の陰解法近似は、

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \left(\hat{\mathbf{n}}_{n+1} - \frac{\beta}{3} \mathbf{I} \right), \quad (3.2.3.5)$$

$$\bar{e}_{n+1}^p = \bar{e}_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma, \quad (3.2.3.6)$$

で与えられる。また(3.2.3.5)より、塑性体積ひずみは

$$tr(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) = tr(\boldsymbol{\varepsilon}_n^p) + \beta \Delta\gamma, \quad (3.2.3.7)$$

となる。

ここで試行弾性状態を考えると応力は、

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p), \quad (3.2.3.8)$$

と表される。ここで \mathbf{C} は式(3.1.1.2)で示される弾性構成テンソルである。上式より偏差応力に関する試行応力は:

$$\mathbf{S}_{n+1}^{trial} = 2\mu(\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^p), \quad (3.2.3.9)$$

となる。これと、

$$\mathbf{S}_{n+1} = 2\mu(\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^p), \quad (3.2.3.10)$$

の差をとり、両辺に $\hat{\mathbf{n}}_{n+1}$ をかけると、

$$\|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\| = \|\mathbf{S}_{n+1}\| + 2\mu\Delta\gamma, \quad (3.2.3.11)$$

なる関係が得られる。

平均応力に関する試行応力は:

$$p_{n+1}^{trial} = -\kappa(tr\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - tr\boldsymbol{\varepsilon}_n^p), \quad (3.2.3.12)$$

となり、これと

$$p_{n+1} = -\kappa(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p), \quad (3.2.3.13)$$

の差をとると、

$$p_{n+1}^{\text{trial}} = p_{n+1} - \kappa\beta\Delta\gamma, \quad (3.2.3.14)$$

の関係が得られる。

式(3.2.3.11)、(3.2.3.14)と、時刻 t_{n+1} で満たすべき降伏関数:

$$g := f_{n+1} = \|\mathbf{S}_{n+1}\| - \beta p_{n+1} - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + H\bar{e}_{n+1}^p) = 0, \quad (3.2.3.15)$$

を用いることにより、

$$g = \|\mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}}\| - 2\mu\Delta\gamma - \beta p_{n+1}^{\text{trial}} - \kappa\beta^2\Delta\gamma - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + H\bar{e}_{n+1}^p) = 0, \quad (3.2.3.16)$$

となり、さらに試行降伏関数:

$$f_{n+1}^{\text{trial}} = \|\mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}}\| - \beta p_{n+1}^{\text{trial}} - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + H\bar{e}_n^p) = 0, \quad (3.2.3.17)$$

を代入すると、Scalar consistency parameter:

$$\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{\text{trial}}}{2\mu + \kappa\beta^2 + \frac{2}{3}H}, \quad (3.2.3.18)$$

が陽に求まる。一般的には、この Scalar consistency parameter は陽には求まらず、ガウス点ごとに何らかの収束計算が必要となるが、この Drucker Prager 弾塑性モデルの場合、収束計算は必要ない。

3.2.4. Consistent 弾塑性構成テンソル(陰解法弾塑性計算)

時刻 t_{n+1} での弾性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ を考慮した応力は次式のように表される:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} = \kappa [\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}) - \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^p)] \mathbf{1} - \kappa \beta \Delta \gamma \mathbf{1} + \mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu \Delta \gamma \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{\text{trial}}. \quad (3.2.4.1)$$

これを $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ で偏微分することにより、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} &= \kappa (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - \kappa \beta \left(\mathbf{1} \otimes \frac{\partial (\Delta \gamma)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \right) + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \\ &\quad - 2\mu \left(\hat{\mathbf{n}}_{n+1} \otimes \frac{\partial (\Delta \gamma)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \right) - 2\mu \Delta \gamma \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}, \end{aligned} \quad (3.2.4.2)$$

となる。ここで(3.2.3.11)の両辺を $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ で偏微分することにより、

$$\frac{\partial (\Delta \gamma)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\kappa \beta \mathbf{1} + 2\mu \hat{\mathbf{m}}_{n+1}}{2\mu + \kappa \beta^2 + \frac{2}{3} H}, \quad (3.2.4.3)$$

が得られ、これと、

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{2\mu}{\|\mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}}\|} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \hat{\mathbf{n}}_{n+1} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+1} \right), \quad (3.2.4.4)$$

の関係を(3.2.4.2)に代入することにより、次式の Consistent 弾塑性構成テンソルを得る:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{ep(k)} &= \kappa \left(1 - \frac{\kappa \beta^2}{A} \right) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2\mu \theta \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right] \\ &\quad - \frac{2\mu \kappa \beta}{A} [(\mathbf{1} \otimes \hat{\mathbf{n}}) + (\hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{1})] - 2\mu \bar{\theta} (\hat{\mathbf{n}}_{n+1} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+1}). \end{aligned} \quad (3.2.4.5)$$

ここで、

$$A = 2\mu + \kappa \beta^2 + \frac{2}{3} H, \quad (3.2.4.6)$$

$$\theta = 1 - \frac{2\mu \Delta \gamma}{\|\mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}}\|}, \quad (3.2.4.7)$$

$$\bar{\theta} = \frac{2\mu}{A} - (1 - \theta), \quad (3.2.4.8)$$

である。

これをマトリクス表示するため、ベクトル $\{j\}$ 、マトリクス $[L]$ を定義する:

$$\{j\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.2.4.9)$$

また、マトリクス $[L]^{-1}$ は

$$[L]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.2.4.10)$$

となる。これらは本来、テンソルである応力、ひずみをベクトル化したことにより、計算上あると便利な演算マトリクスである。例えば平均応力は次式のように求める：

$$\begin{aligned} p' &= -\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}' = -\frac{1}{3} (\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33}), \\ &= -\frac{1}{3} \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0\} \begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{33} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix}, \\ &= -\frac{1}{3} \{j\}^T \{\sigma'\}. \end{aligned} \quad (3.2.4.11)$$

また一般化偏差応力 q はマトリクス $[L]$ を用いて次のように計算される：

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{S}_{ij} \mathbf{S}_{ij} = \sqrt{\frac{3}{2}} (S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + 2S_{12}^2), \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \{S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33} \quad S_{12}\} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{12} \end{Bmatrix}, \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \{S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33} \quad S_{12}\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \end{Bmatrix}, \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \{S\}^T [L] \{S\}. \end{aligned} \quad (3.2.4.12)$$

次に単位偏差応力ベクトルを定義する：

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{S}_{n+1}^{tr}}{\|\mathbf{S}_{n+1}^{tr}\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S}_{n+1}^{tr}}{q_{n+1}^{tr}} = \begin{Bmatrix} \hat{n}_1 \\ \hat{n}_2 \\ \hat{n}_3 \\ \hat{n}_4 \end{Bmatrix}. \quad (3.2.4.13)$$

これらを用いて式(3.2.4.5)で示された Consistent 弾塑性構成テンソル内の5つのマトリクスを導入する：

$$\mathbf{I} = [L]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.2.4.14)$$

$$(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = \{j\} \{j\}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2.4.15)$$

$$(\mathbf{1} \otimes \hat{\mathbf{n}}) = \{j\} \{\hat{n}\}^T = \begin{bmatrix} \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2.4.16)$$

$$(\hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{1}) = \{\hat{n}\} \{j\}^T = \begin{bmatrix} \hat{n}_1 & \hat{n}_1 & \hat{n}_1 & 0 \\ \hat{n}_2 & \hat{n}_2 & \hat{n}_2 & 0 \\ \hat{n}_3 & \hat{n}_3 & \hat{n}_3 & 0 \\ \hat{n}_4 & \hat{n}_4 & \hat{n}_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2.4.17)$$

$$(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) = \{\hat{n}\} \{\hat{n}\}^T = \begin{bmatrix} \hat{n}_1 \hat{n}_1 & \hat{n}_1 \hat{n}_2 & \hat{n}_1 \hat{n}_3 & \hat{n}_1 \hat{n}_4 \\ \hat{n}_2 \hat{n}_1 & \hat{n}_2 \hat{n}_2 & \hat{n}_2 \hat{n}_3 & \hat{n}_2 \hat{n}_4 \\ \hat{n}_3 \hat{n}_1 & \hat{n}_3 \hat{n}_2 & \hat{n}_3 \hat{n}_3 & \hat{n}_3 \hat{n}_4 \\ \hat{n}_4 \hat{n}_1 & \hat{n}_4 \hat{n}_2 & \hat{n}_4 \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \hat{n}_4 \end{bmatrix}, \quad (3.2.4.18)$$

これらを用いて式(3.2.4.5)で示された Consistent 弾塑性構成テンソルをマトリクス表示すると:

$$[\bar{\mathbf{C}}^{ep}] = \kappa \left(1 - \frac{\kappa \beta^2}{A} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\mu\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ - \frac{2\mu\kappa\beta}{A} \begin{bmatrix} \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{2\mu\kappa\beta}{A} \begin{bmatrix} \hat{n}_1 & \hat{n}_1 & \hat{n}_1 & 0 \\ \hat{n}_2 & \hat{n}_2 & \hat{n}_2 & 0 \\ \hat{n}_3 & \hat{n}_3 & \hat{n}_3 & 0 \\ \hat{n}_4 & \hat{n}_4 & \hat{n}_4 & 0 \end{bmatrix} \\ - 2\mu\bar{\theta} \begin{bmatrix} \hat{n}_1 \hat{n}_1 & \hat{n}_1 \hat{n}_2 & \hat{n}_1 \hat{n}_3 & \hat{n}_1 \hat{n}_4 \\ \hat{n}_2 \hat{n}_1 & \hat{n}_2 \hat{n}_2 & \hat{n}_2 \hat{n}_3 & \hat{n}_2 \hat{n}_4 \\ \hat{n}_3 \hat{n}_1 & \hat{n}_3 \hat{n}_2 & \hat{n}_3 \hat{n}_3 & \hat{n}_3 \hat{n}_4 \\ \hat{n}_4 \hat{n}_1 & \hat{n}_4 \hat{n}_2 & \hat{n}_4 \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \hat{n}_4 \end{bmatrix}. \quad (3.2.4.19)$$

となる。

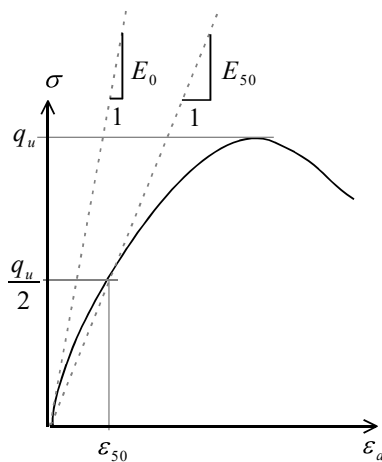
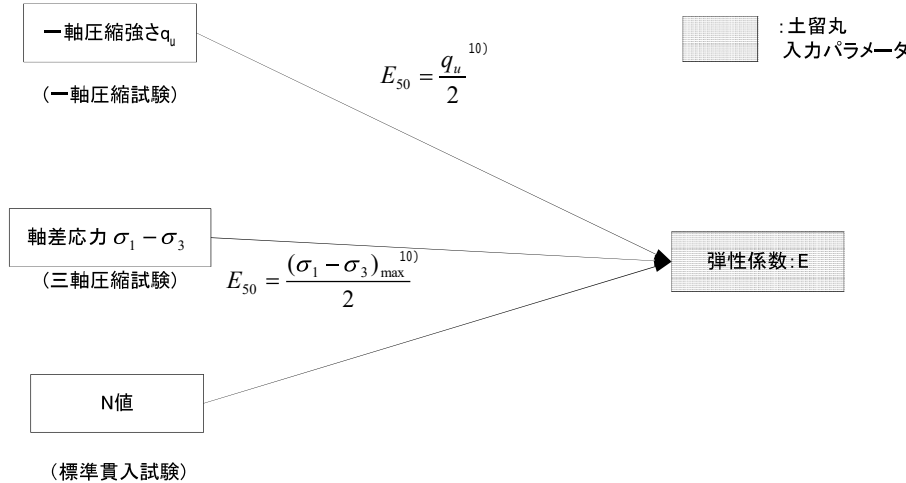
3.2.5. Drucker Prager 弾塑性モデルの入力値

Drucker Prager 弾塑性モデルの入力値に関しては、弾性体モデルの入力定数に加えて、平均応力にかかる係数 β 、降伏応力 σ_y 、硬化係数 H が必要となる。これらは Drucker Prager 弾塑性モデルの降伏関数：

$$f = \|\mathbf{S}\| - \beta p - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + H\bar{e}^p) = 0, \quad (3.2.1.1 \text{ 再})$$

の中の係数である。

これらの Drucker Prager 弾塑性モデルの入力値に対する決定フローを以下に示す。



まず、変形を表す弾性係数は、一軸圧縮試験や三軸圧縮試験などの要素試験がある場合とない場合に分かれる。一軸圧縮試験を行った場合、次式の応力・ひずみを用いて左図の応力-ひずみ曲線を描く。圧縮ひずみ ϵ_a (%) は

$$\epsilon_a = \frac{\Delta H}{H_0} \times 100, \quad (3.2.5.1)$$

ここに、 ΔH : 圧縮量 (cm)、 H_0 : 圧縮前の供試体高さ (cm) である。また、圧縮応力 σ (kN/m²) を次式で算出する。

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \times \left(1 - \frac{\epsilon}{100}\right) \times 10, \quad (3.2.5.2)$$

図 3-7 一軸圧縮試験

ここで、 P : 圧縮ひずみが ϵ_a (%) の時に供試体に加えられた圧縮力 (N)、 A_0 : 圧縮前の供試体の断面積 (cm²) である。弾性係数 E_{50} (MN/m²) を次式で算出する。

$$E_{50} = \frac{q_u}{\epsilon_{50}} / 10, \quad (3.2.5.3)$$

ここに、 $\epsilon_{50} : \sigma = q_u / 2$ のときの圧縮ひずみ (%)、 q_u : 一軸圧縮強さ (kN/m²) である。

三軸試験を行った場合も、同様に軸差応力-ひずみ曲線を描き、想定される拘束圧の下での弾性係数を算出する。これらの方法による弾性係数は、図から見ても明らかなように、ひずみレベルによって大きく異なることに注意が必要である。

上記のように弾性係数の決定には要素試験結果を使うことが望ましいが、それが困難な場合にはN値から推定するか、同種の土で一般的に使われている土質定数を使うことになる。

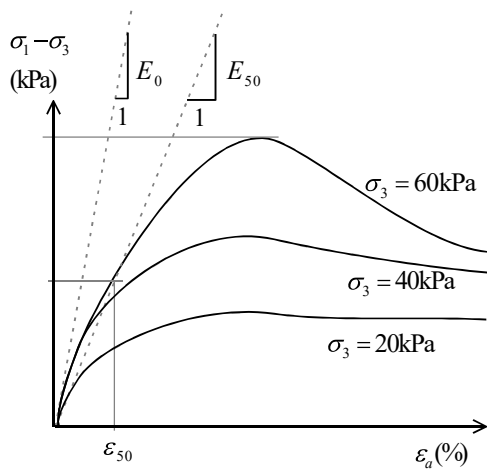


図3-8 三軸圧縮試験

原稿の各種設計基準に記載のある経験式については、石井(1999)¹⁰が非常に有用なデータ収集を行っているので参照されたい。ここでは参考の為、そこより抜粋して掲載する。

文献(砂)

① 鉄道総合技術研究所:鉄道構造物等設計標準・同解説

$$E_0 = (3 \sim 4)E_b$$

$$E_0 = 7N$$

$$E_0 = (3 \sim 4) \cdot 7N \approx 25N$$

ここに、 E_0 :地盤の変形係数(kgf/cm²)

E_b :孔内水平載荷試験から求まる変形係数(kgf/cm²)

N :標準貫入試験のN値

② 日本港湾協会:港湾の施設の技術上の基準・同解説
砂地盤に対するの記述なし(粘性土のみ)

③ 日本道路協会:道路橋示方書・同解説

$$E_0 = 28N$$

ここに、 E_0 :地盤の変形係数(kgf/cm²)

N :標準貫入試験のN値

④ 首都高速道路厚生会:仮設構造物設計基準

$$E_0 = 28N$$

ここに、 E_0 :地盤の変形係数(kgf/cm²)

N :標準貫入試験のN値

⑤ 日本建築学会:建築基礎構造設計指針
実大フーチングと平板載荷試験の結果から次式を導いた。

$$\text{正規圧密された砂: } E_0 = 14N$$

$$\text{過圧密された砂: } E_0 = 28N$$

ここに、 E_0 :地盤の変形係数(kgf/cm²)

N :標準貫入試験のN値

⑥ 日本道路協会:道路土工 軟弱地盤対策工指針

軟弱地盤がゆるい砂層や砂質土層であった場合、または軟弱層にゆるい砂層や砂質土層が挟まれて存在する場合には、N値を用いて次式から E_{50} を推定する。

$$E_{50} = 6N + 10$$

ここに、 E_{50} :地盤の変形係数(kgf/cm²)

N :標準貫入試験のN値

なお、砂層が薄くてN値が測定されていない場合は、 E_{50} を上下の粘性土層の中間値を採用してもよい。

文献(粘性土)

① 鉄道総合技術研究所:鉄道構造物等設計標準・同解説

おおよその目安としては、粘性土地盤においても $E_0 = 25N$ の傾向が認められる。

② 日本港湾協会:港湾の施設の技術上の基準・同解説

$$E_i = 210c_u$$

$$E_{50} = 180c_u$$

ここに、 E_i :初期正接係数(kgf/cm²)

(ひずみレベル 0.2~0.5%に対応すると考えられる。)

E_{50} :割線係数(kgf/cm²)

c_u :非排水せん断強さ(kgf/cm²)

③ 日本道路協会:道路橋示方書・同解説

$$E_0 = 28N$$

ここに、 E_0 :地盤の変形係数(kgf/cm²)

N :標準貫入試験のN値

④ 首都高速道路厚生会:仮設構造物設計基準

$$E_0 = 28N$$

ここに、 E_0 :地盤の変形係数(kgf/cm²)

N :標準貫入試験のN値

⑤ 日本建築学会:建築基礎構造設計指針

飽和沖積粘土: $E_s = 50c_u$

飽和洪積粘土: $E_s = 400c_u$

ここに、 E_s :地盤の変形係数(kgf/cm²)

c_u :非排水せん断強さ(kgf/cm²)

⑥ 高速道路調査会編:関東ロームの土工—その土質と設計・施工—

$$E_{50} = (50 \sim 250)q_u$$

$$E_{50} = 250q_u \text{ (乱されていない試料)}$$

ここに、 E_{50} :割線弾性係数(kgf/cm²)

q_u :一軸圧縮強さ(kgf/cm²)

文献(改良地盤)

① CDM研究会:設計と施工マニュアル

対象土の砂分含有率が 10~15%以下であれば、変形係数 E_{50} は以下の範囲にある。

$$E_{50} = (400 \sim 600)q_u$$

ここに、 E_{50} :割線弾性係数(kgf/cm²)

q_u :一軸圧縮強さ(kgf/cm²)

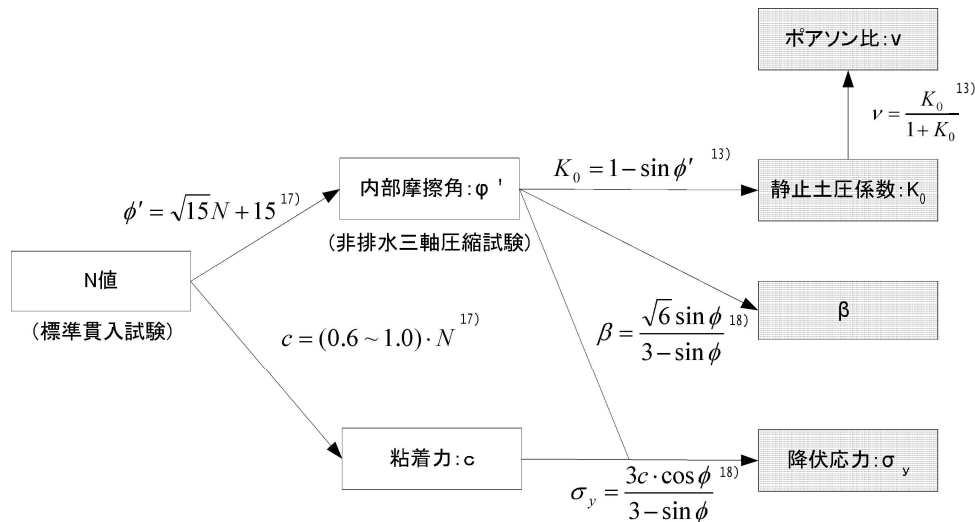
② DJM工法研究会:技術マニュアル

変形係数 E_{50} は概ね次の範囲にある。この工法は空気粉体を地盤に送り込むため、改良体に空気が残留するので、CDM工法に比べて変形係数が小さくなると思われる。

$$E_{50} = (50 \sim 200)q_u$$

ここに、 E_{50} :割線弾性係数(kgf/cm²)

q_u :一軸圧縮強さ(kgf/cm²)



次に強度に関するパラメータ β 、 σ_y の決定法についてであるが、基本的には粘着力 c 、および内部摩擦角 ϕ より求める。この粘着力と内部摩擦角についても当該地盤のサンプリング試料を用いて土質試験を実施して決定することが基本となるが、実務においては手間や費用を要する為、標準貫入試験によるN値などから物性値を推定せざる得ない場合が多く、これも石井(1999)¹⁰⁾に有用なデータが収集されているので参照されたい。ここでは参考の為、幾つかそより抜粋する。

- ① 鉄道総合技術研究所: 鉄道構造物等設計標準・同解説
 ・砂質土の内部摩擦角

$$\phi = 1.85 \left(\frac{N}{\sigma'_v + 0.7} \right)^{0.6} + 26$$

ここに、 ϕ : 砂質土の内部摩擦角 (deg.)

σ'_v : 地質調査時の当該位置の有効上載圧 (kgf/cm²)

ただし、0.5 (kgf/cm²) を最小とする。

N : 標準貫入試験のN値

- ② 日本港湾協会: 港湾の施設の技術上の基準・同解説
 ・砂質土の内部摩擦角

$$\phi = 25 + 3.2 \sqrt{\frac{100N}{70 + p_w}}$$

ここに、 ϕ : 砂質土の内部摩擦角 (deg.)

p_w : 標準貫入試験値を測定した時の有効土被り圧 (kN/m²)

ただし、0.5 (kgf/cm²) を最小とする。

N : 標準貫入試験のN値

- ・粘性土(海成粘土)の圧密による強度増加

$$c_u/p = 0.28 \sim 0.30$$

ここに、 c_u : 粘着力 (kN/m²)

p : 圧密圧力 (kN/m²)

- ③ 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説
 ・砂質土の内部摩擦角

$$\phi = \min(15 + \sqrt{15N}, 45)$$

ここに、 ϕ : 砂質土の内部摩擦角 (deg.)

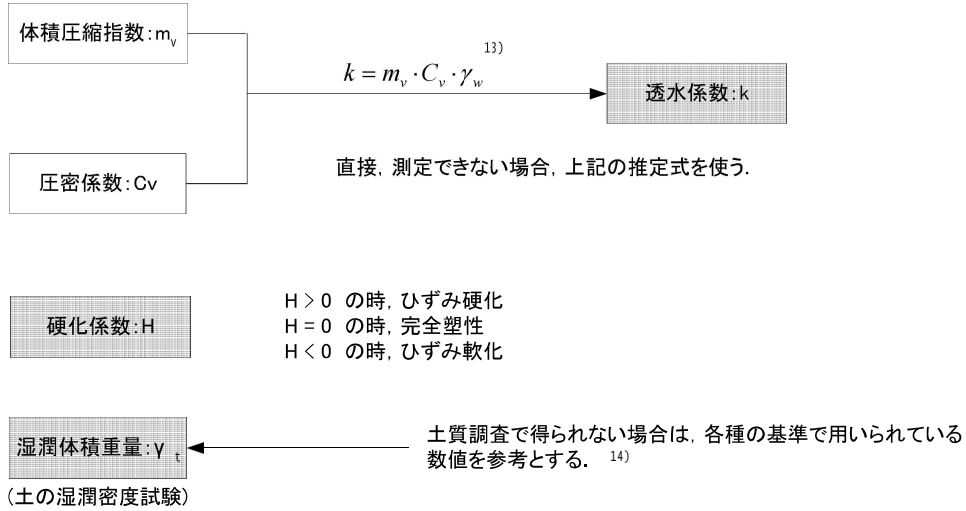
N : 標準貫入試験のN値、ただし、 $N > 5$

・粘性土の粘着力

$$c_u = (0.6 \sim 1.0)N$$

ここに、 c_u : 粘着力 (tf/m²)

N : 標準貫入試験のN値



3.3. Cam Clay 弾塑性モデル

3.3.1. Continuum弾塑性モデル(従来の陰解法弾塑性計算)

Cam-clay の降伏関数は以下のように与えられる。

$$f(p, q, p_c) = q + Mp \ln\left(\frac{p}{p_c}\right) = 0 \quad (3.3.1.1)$$

ここで平均応力 $p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}')$ であり、一般化偏差応力 $q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S}\|$ 、偏差応力 $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}') \mathbf{1}$ である。応力の右上のダッシュは有効応力であることを表している。応力、ひずみ等は引張り正であり、平均応力、体積ひずみ等は土質力学の慣例に従い圧縮を正としている。 M は限界応力比、 p_c は先行圧密応力である。降伏関数 f の p 、 q 、 p_c での微分を求めると：

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p} &= M[1 + \ln(\frac{p}{p_c})], \\ \frac{\partial f}{\partial q} &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial p_c} &= -M \frac{p}{p_c}, \end{aligned} \quad (3.3.1.2)$$

である。

関連流れ則を仮定すると塑性ひずみ速度テンソルは次式で与えられ：

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}, \quad (3.3.1.3)$$

ここで γ は塑性乗数(コンシステンシーパラメータ)である。

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) \mathbf{1} + \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) \hat{\mathbf{n}}, \quad (3.3.1.4)$$

であり、ここで $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{S} / \|\mathbf{S}\|$ である。

また硬化則は

$$\dot{p}_c = \frac{p_c}{MD} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v^p, \quad (3.3.1.5)$$

で与えられ、 D はダイレイタンス係数であり、 λ を圧縮指数、 κ を膨潤指数、 e を間隙比とすると

$$D = \frac{\lambda - \kappa}{M(1 + e)}, \quad (3.3.1.6)$$

で与えられる。

応力速度が弾性構成テンソルと弾性ひずみ速度で表せること、流れ則(3.3.1.3)、硬化則(3.3.1.5)、 $\gamma > 0$ の際の consistency 条件：

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}', p_c) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}'} + \frac{\partial f}{\partial p_c} \dot{p}_c = 0, \quad (3.3.1.7)$$

を用いることにより

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \left[\mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \otimes \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \mathbf{C}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \cdot \mathbf{C} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} - \frac{p_c}{MD} \frac{\partial f}{\partial p_c} \frac{\partial f}{\partial p}} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.3.1.8)$$

が得られる。ここで \mathbf{C} は弾性構成テンソルであり、Cam Clay モデルの場合

$$\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}), \quad (3.3.1.9)$$

と表される。ここで係数 $\tilde{\mathbf{K}} = (1+e)p/\kappa$ 、 $\tilde{\mathbf{G}} = 3\tilde{\mathbf{K}}(1-2\nu)/2(1+\nu)$ であり、 ν はポアソン比である。

式(3.3.1.2)の関係を代入し、整理することにより(Continuum)弾塑性構成テンソル \mathbf{C}^{ep} を得ることができる:

$$\mathbf{C}^{ep} = 2\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{I} + c_1(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + c_2(\hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{n}}) + c_3(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}). \quad (3.3.1.10)$$

ここで

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\tilde{\mathbf{K}}}{\chi} \left\{ \frac{p}{D} M[1 + \ln(\frac{p}{p_c})] + 3\tilde{\mathbf{G}} \right\} - \frac{2}{3} \tilde{\mathbf{G}}, \\ c_2 &= \frac{\tilde{\mathbf{K}}}{\chi} \sqrt{6\tilde{\mathbf{G}}M[1 + \ln(\frac{p}{p_c})]}, \\ c_3 &= -\frac{6}{\chi} \tilde{\mathbf{G}}^2, \\ \chi &= \tilde{\mathbf{K}}M^2[1 + \ln(\frac{p}{p_c})]^2 \\ &\quad + \frac{p}{D} M[1 + \ln(\frac{p}{p_c})] + 3\tilde{\mathbf{G}}, \end{aligned} \quad (3.3.1.11)$$

である。

式(3.2.3.14)から式(3.2.3.18)のマトリクスを用いて、 4×4 の Continuum 接線剛性マトリクスを作成する:

$$\begin{aligned} [C^{ep}] &= 2\tilde{\mathbf{G}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + c_3 \begin{bmatrix} \hat{n}_1 & \hat{n}_1 & \hat{n}_1 & 0 \\ \hat{n}_2 & \hat{n}_2 & \hat{n}_2 & 0 \\ \hat{n}_3 & \hat{n}_3 & \hat{n}_3 & 0 \\ \hat{n}_4 & \hat{n}_4 & \hat{n}_4 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} \hat{n}_1\hat{n}_1 & \hat{n}_1\hat{n}_2 & \hat{n}_1\hat{n}_3 & \hat{n}_1\hat{n}_4 \\ \hat{n}_2\hat{n}_1 & \hat{n}_2\hat{n}_2 & \hat{n}_2\hat{n}_3 & \hat{n}_2\hat{n}_4 \\ \hat{n}_3\hat{n}_1 & \hat{n}_3\hat{n}_2 & \hat{n}_3\hat{n}_3 & \hat{n}_3\hat{n}_4 \\ \hat{n}_4\hat{n}_1 & \hat{n}_4\hat{n}_2 & \hat{n}_4\hat{n}_3 & \hat{n}_4\hat{n}_4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3.1.12)$$

3.3.2. Return mapping algorithm : closest point projection method (陰解法 Return mapping)

式(1.4.3)の負荷除荷判定において $[t_n, t_{n+1}]$ の現ステップが塑性ステップであると判断された際、単に陽解法近似を行った計算アルゴリズムで増分解析を行うと、一般に求めた応力等が降伏局面上にないので降伏局面上に応力を引き戻す必要がある。これを Return mapping algorithms と呼ぶ。Borja ら⁴⁾が return mapping algorithm として修正 Cam-clay モデルに対して提案している closest point projection 法を Cam Clay モデルに対して適用する。

流れ則(3.3.1.3)、硬化則(3.3.1.5)の有限時間積分により、次式が得られる：

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}, \quad (3.3.2.1)$$

$$\Delta \varepsilon_v^p = \Delta \gamma \frac{\partial f}{\partial p}, \quad (3.3.2.2)$$

$$(p_c)_{n+1} = (p_c)_n \exp\left(\frac{\Delta \varepsilon_v^p}{MD}\right), \quad (3.3.2.3)$$

Return mapping 応力 tensor を次式のように表す：

$$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k)} = \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{trial} - \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (3.3.2.4)$$

この $\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k)}$ の平均応力部分を考えると

$$p := p_{n+1}^{(k)} = p_{n+1}^{trial} - \tilde{\mathbf{K}} \Delta \varepsilon_v^p, \quad (3.3.2.5)$$

偏差部分は

$$q := q_{n+1}^{(k)} = q_{n+1}^{trial} - 3\tilde{\mathbf{G}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (3.3.2.6)$$

となる。ここで $q_{n+1}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\|$ 、 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\|$ 、 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p + \frac{1}{3} \Delta \varepsilon_v^p \mathbf{I}$ である。(3.3.2.5)、(3.3.2.6)、(3.3.2.3)に(3.3.1.2)、(3.3.2.2)の関係を代入すると：

$$p = p_{n+1}^{trial} - \Delta \gamma \tilde{\mathbf{K}} M \left[1 + \ln\left(\frac{p}{p_c}\right)\right], \quad (3.3.2.7)$$

$$q = q_{n+1}^{trial} - 3\tilde{\mathbf{G}} \Delta \gamma, \quad (3.3.2.8)$$

$$p_c := (p_c)_{n+1} = (p_c)_n \left(\frac{p}{p_c}\right)^{\frac{\Delta \gamma}{D}} \exp\left(\frac{\Delta \phi}{D}\right), \quad (3.3.2.9)$$

となり、コンシステンシー条件(3.3.1.1)の $f = 0$ とあわせると p 、 q 、 p_c 、 $\Delta \gamma$ に関する非線形連立方程式となっていることが分かる。

3.3.3. Scalar consistency parameterの決定

式(3.3.2.7)、(3.3.2.8)、(3.3.2.9)内のパラメータ $\Delta\gamma$ は consistency 要求(3.3.1.1)を満たすように決定されなければならない。この根 $\Delta\gamma$ はスカラー関数 f に Newton Raphson 法を適用することにより求めることができるが、その際の初期値としては $p = p_{n+1}^{trial}$ 、 $q = q_{n+1}^{trial}$ 、 $p_c = (p_c)_n$ 、 $\Delta\gamma = 0$ を用いる。

f の $\Delta\gamma$ による偏微分 f' は、chain rule を用いると

$$f'(\Delta\gamma) = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial(\Delta\gamma)} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial(\Delta\gamma)} + \frac{\partial f}{\partial p_c} \frac{\partial p_c}{\partial(\Delta\gamma)}, \quad (3.3.3.1)$$

となる。ここで $\partial f/\partial p$ 、 $\partial f/\partial q$ 、 $\partial f/\partial p_c$ は式(3.3.1.2)で与えられている。また式(3.3.2.7)、(3.3.2.8)、(3.3.2.9)を微分し、陰的に解くことにより

$$\frac{\partial p}{\partial(\Delta\gamma)} = -\frac{\tilde{K} M D [1 + \ln(\frac{p}{p_c})]}{D + \tilde{K} M \Delta\gamma / p + \Delta\gamma}, \quad (3.3.3.2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial(\Delta\gamma)} = -3\tilde{G}, \quad (3.3.3.3)$$

$$\frac{\partial p_c}{\partial(\Delta\gamma)} = -\frac{p_c [1 + \ln(\frac{p}{p_c})]}{D + \tilde{K} M \Delta\gamma / p + \Delta\gamma}, \quad (3.3.3.4)$$

となる。ここで、変数 p 、 p_c は式(3.3.2.7)、(3.3.2.9)と連成しているため、関数 $f(\Delta\gamma^{(k)})$ は陽には求まらない。そこで p と p_c は反復的に解く。

式(3.3.2.9)を変形し、再表記すると

$$p_c = [(p_c)_n p^{\frac{\Delta\gamma^{(k)}}{D}} \exp(\frac{\Delta\gamma^{(k)}}{D})]^{\frac{D}{D + \Delta\gamma^{(k)}}}, \quad (3.3.3.5)$$

となり、これを式(3.3.2.7)に代入することにより次式を得る：

$$g(p) := p_{n+1}^{trial} + \Delta\gamma^{(k)} \tilde{K} M \frac{D}{D + \Delta\gamma^{(k)}} [\ln(p_c)_n - (1 + \ln p)] - p = 0, \quad (3.3.3.6)$$

この式の根 $p = p_{n+1}^{(k)}$ は、Newton Raphson 法を用いることにより、反復的に求められる。 g の p による偏微分 g' は

$$g'(p) = -(1 + \Delta\gamma^{(k)} \tilde{K} M \frac{D}{D + \Delta\gamma^{(k)}} \frac{1}{p}) \quad (3.3.3.7)$$

である。

この p 、 q 、 p_c 、 $\Delta\gamma$ を求める2重の Newton Raphson 法のアルゴリズムを図3-9に示す。

図 3-9 $f=0$ 、 $g=0$ とする根 p 、 q 、 p_c 、 $\Delta\gamma$ を求める Newton Raphson algorithm.

1. 初期化 $k = 0$, $\Delta\gamma^{(k)} = 0$.
2. $f^{(k)} = f(\Delta\gamma^{(k)})$ の計算.
 - 2.1. 初期化 $j = 0$, $p^{(j)} = p_{n+1}^{trial}$.
 - 2.2. $g^{(j)} = g(p^{(j)})$ の計算.
 - 2.3 if $|g^{(j)}| < g_{tol}$, goto 2.6; else,
 - 2.4 $p^{(j+1)} = p^{(j)} - \frac{g^{(j)}}{g'(p^{(j)})}$.
 - 2.5 $j \leftarrow j + 1$, goto 2.2.
 - 2.6 $f^{(k)} = f(\Delta\gamma^{(k)}, p^{(k)}, q^{(k)}, p_c^{(k)})$ を
計算し, return.
3. if $|f^{(k)}| < f_{tol}$, exit; else,
4. $\Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} - \frac{f^{(k)}}{f'(\Delta\gamma^{(k)})}$.
5. $k \leftarrow k + 1$, goto 2.

3.3.4. Consistent 弾塑性構成テンソル(陰解法弾塑性計算)

ひずみテンソル増分 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n$ を考慮した増分応答関数は次式のように表される:

$$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k)} = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k)}) \mathbf{1} + \|\mathbf{S}_{n+1}^{(k)}\| \hat{\mathbf{n}} = -p \mathbf{1} + \sqrt{\frac{2}{3}} q \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.3.4.1)$$

Consistent 弾塑性構成テンソルは、式(1.4.1)の直接的な偏微分により次式のように得られる:

$$\bar{\mathbf{C}}^{ep}_{n+1}^{(k)} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} = -\mathbf{1} \otimes \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} + \sqrt{\frac{2}{3}} q \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\mathbf{n}} \otimes \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}. \quad (3.3.4.2)$$

ここで $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k)}}{\partial p} = -\mathbf{1}$, $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k)}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} q \mathbf{I}$, $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'_{n+1}^{(k)}}{\partial q} = \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\mathbf{n}}$ を用いた。

式(3.3.4.2)内の各偏微分量は式(3.3.2.7)、(3.3.2.9)を用いて陰的に得ることができる。 p の $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ による微分は:

$$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} = a_1 \mathbf{1} + a_2 \frac{\partial(\Delta\gamma)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}, \quad (3.3.4.3)$$

となり、ここで

$$\begin{aligned} a_1 &= -\tilde{\mathbf{K}}p(D + \Delta\gamma)/a, \\ a_2 &= -\tilde{\mathbf{K}}MDp[1 + \ln(\frac{p}{p_c})]/a, \\ a &= Dp + \Delta\gamma(p + \tilde{\mathbf{K}}MD), \end{aligned} \quad (3.3.4.4)$$

である。また p_c の $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ による微分は:

$$\frac{\partial p_c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} = a_3 \mathbf{1} + a_4 \frac{\partial(\Delta\gamma)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}, \quad (3.3.4.5)$$

となり、ここで

$$\begin{aligned} a_3 &= -\tilde{\mathbf{K}}p_c \Delta\gamma/a, \\ a_4 &= p_c p [1 + \ln(\frac{p}{p_c})]/a, \end{aligned} \quad (3.3.4.6)$$

である。 q の $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ による微分は:

$$\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} = \sqrt{6} \tilde{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{n}} - 3\tilde{\mathbf{G}} \frac{\partial(\Delta\gamma)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}, \quad (3.3.4.7)$$

となる。次に consistency 要求を課すことにより $\partial(\Delta\gamma)/\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ を得ることができる。すなわち $f = f(\Delta\gamma(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}))$ を $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ で偏微分した結果:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} + \frac{\partial f}{\partial p_c} \frac{\partial p_c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} \equiv 0, \quad (3.3.4.8)$$

に式(3.3.4.3)、(3.3.4.5)、(3.3.4.7)を代入することにより

$$\frac{\partial(\Delta\gamma)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} = b_1 \mathbf{1} + b_2 \hat{\mathbf{n}}, \quad (3.3.4.9)$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned}
b_1 &= M\{a_3 \frac{p}{p_c} - a_1[1 + \ln(\frac{p}{p_c})]\} / b , \\
b_2 &= -\sqrt{6}\tilde{G} / b , \\
b &= -M\{a_4 \frac{p}{p_c} - a_2[1 + \ln(\frac{p}{p_c})]\} - 3\tilde{G} ,
\end{aligned} \tag{3.3.4.10}$$

である。

式(3.3.4.9)を(3.3.4.3)、(3.3.4.5)、(3.3.4.7)に代入することによって次の関係式を得る：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} &= a_1 \mathbf{1} + a_2(b_1 \mathbf{1} + b_2 \hat{\mathbf{n}}) , \\
&= (a_1 + a_2 b_1) \mathbf{1} + a_2 b_2 \hat{\mathbf{n}} . \\
\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} &= \sqrt{6}\tilde{G}\hat{\mathbf{n}} - 3\tilde{G}(b_1 \mathbf{1} + b_2 \hat{\mathbf{n}}) , \\
&= -3\tilde{G}b_1 \mathbf{1} + \tilde{G}(\sqrt{6} - 3b_2) \hat{\mathbf{n}} . \\
\frac{\partial p_c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} &= a_3 \mathbf{1} + a_4(b_1 \mathbf{1} + b_2 \hat{\mathbf{n}}) , \\
&= (a_3 + a_4 b_1) \mathbf{1} + a_4 b_2 \hat{\mathbf{n}} .
\end{aligned} \tag{3.3.4.11}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ の $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ での偏微分：

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} = \frac{2\tilde{G}}{\|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\|} (\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) . \tag{3.3.4.12}$$

と式(3.3.4.11)の関係(3.3.4.2)に代入することにより次式の Consistent 弾塑性構成テンソルを得る：

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{C}}^{ep(k)} &= 2\tilde{G}\xi \mathbf{I} - (a_1 + a_2 b_1 + \frac{2}{3}\tilde{G}\xi)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \\
&\quad - a_2 b_2 (\mathbf{1} \otimes \hat{\mathbf{n}}) - \sqrt{6}\tilde{G}b_1 (\hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{1}) + \tilde{G}(2 - \sqrt{6}b_2 - 2\xi)(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) ,
\end{aligned} \tag{3.3.4.13}$$

ここで、 $\xi = \sqrt{\frac{2}{3}}q / \|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\| = \|\mathbf{S}_{n+1}^{(k)}\| / \|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\|$ である。 $\Delta\gamma \rightarrow 0$ とすると $\bar{\mathbf{C}}^{ep(k)}$ は式(3.3.1.10)の (Continuum) 弾塑性構成テンソル \mathbf{C}^{ep} に一致する。

式(3.3.4.13)の Consistent 弾塑性構成テンソルは、通常の Continuum 弾塑性構成テンソルを使用する場合と異なり、式(1.3.1)、(1.3.2)を Newton Raphson 法で解くのに整合しており、したがって2次収束を保証している。

ここで2次元の場合でマトリクス表示した Consistent 弾塑性構成テンソルを以下に示す：

$$\begin{aligned}
[\bar{\mathbf{C}}^{ep}] &= 2\tilde{G}\xi \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - (a_1 + a_2 b_1 + \frac{2}{3}\tilde{G}\xi) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - a_2 b_2 \begin{bmatrix} \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad - \sqrt{6}\tilde{G}b_1 \begin{bmatrix} \hat{n}_1 & \hat{n}_1 & \hat{n}_1 & 0 \\ \hat{n}_2 & \hat{n}_2 & \hat{n}_2 & 0 \\ \hat{n}_3 & \hat{n}_3 & \hat{n}_3 & 0 \\ \hat{n}_4 & \hat{n}_4 & \hat{n}_4 & 0 \end{bmatrix} + \tilde{G}(2 - \sqrt{6}b_2 - 2\xi) \begin{bmatrix} \hat{n}_1 \hat{n}_1 & \hat{n}_1 \hat{n}_2 & \hat{n}_1 \hat{n}_3 & \hat{n}_1 \hat{n}_4 \\ \hat{n}_2 \hat{n}_1 & \hat{n}_2 \hat{n}_2 & \hat{n}_2 \hat{n}_3 & \hat{n}_2 \hat{n}_4 \\ \hat{n}_3 \hat{n}_1 & \hat{n}_3 \hat{n}_2 & \hat{n}_3 \hat{n}_3 & \hat{n}_3 \hat{n}_4 \\ \hat{n}_4 \hat{n}_1 & \hat{n}_4 \hat{n}_2 & \hat{n}_4 \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \hat{n}_4 \end{bmatrix} .
\end{aligned} \tag{3.3.4.14}$$

3.3.5. Cam Clay弾塑性モデルの入力値

近年、軟弱地盤の圧密沈下やせん断に対する変形解析によく用いられるモデルとしては Roscoe(ロスコー)らの Cam Clay モデル^{19), 20), 21)}や、関口・太田モデル^{22), 23)}等があげられる。この Cam Clay 定数を厳密に設定する為には、標準圧密試験、圧密非排水三軸圧縮試験(CU試験)、現位置透水試験が必要となる。しかし、一般にこれらの試験結果がすべて得られることは稀であり、何らかの方法でこの定数を推定せざるを得ない場合が多い。ここでは、上記の試験より土質パラメータを決定する方法とともに、これらに代わる土質データからパラメータを推定する方法についても述べる。

① 圧縮指数 λ および膨張指数 κ

標準圧密試験の $e \cdot \log p$ 曲線の圧密時の傾き C_e および膨張時の傾き C_e より、それぞれ $\lambda = 0.434C_e$ 、 $\kappa = 0.434C_e$ から求める。 $e \cdot \log p$ の膨潤曲線がない場合、 $\kappa = 0.1\lambda \sim 0.2\lambda$ が用いられる場合が多い。

② 限界応力比 M およびダイレイタンス係数 D

限界応力比 M は CU 試験の破壊時の有効応力比より $M = (q/p)_{crit}$ として求められる。

また、ダイレイタンス係数 D と限界応力比 M との間には次の関係式が成り立ち、したがって D は M より算定できる。

$$D = \frac{\lambda - \kappa}{(1 + e_0)M} \quad (3.3.5.1)$$

平均的な日本の粘土では M の値は 1.2~1.4 程度を採ることが多い。また、土の内部摩擦角 ϕ' と M との間には次式のような関係がある。

$$\sin \phi' = \frac{3M}{6 + M} \quad (3.3.5.2)$$

③ 初期間隙比

土の初期間隙比 e_0 は、土粒子の密度、土の湿潤密度、含水比から求めることができる。

④ 正規圧密領域における静止土圧係数

正規圧密領域における静止土圧係数 $K_0^{(NC)}$ は地盤内の水平有効応力と鉛直有効応力の比として与えられる。初期状態(載荷直前の状態)におけるある深さ z の鉛直有効応力は地盤材料の湿潤密度 γ_t と地下水位を知ることによって比較的容易に決定できる。一方、水平有効応力は、現在のところ確信を持ってその値を与える方法は見当たらない。したがってこのパラメータの決定に関しては種々の提案式があり、最も古典的で簡単なものは Jaky の関係式:

$$K_0^{(NC)} = 1 - \sin \phi' \quad (3.3.5.3)$$

である。また関口ら²⁴⁾は提案した弾粘塑性構成モデルの平面ひずみバージョンの構成式に基づいて解析的に次式を誘導している:

$$K_0^{(NC)} = \frac{2 - \kappa/\lambda - \sin \phi'}{2 - \kappa/\lambda + \sin \phi'} \quad (3.3.5.4)$$

⑤ ポアソン比

有効応力表示のポアソン比 ν' の値は正規圧密領域における静止土圧係数 $K_0^{(NC)}$ の値から次式によって決定する。

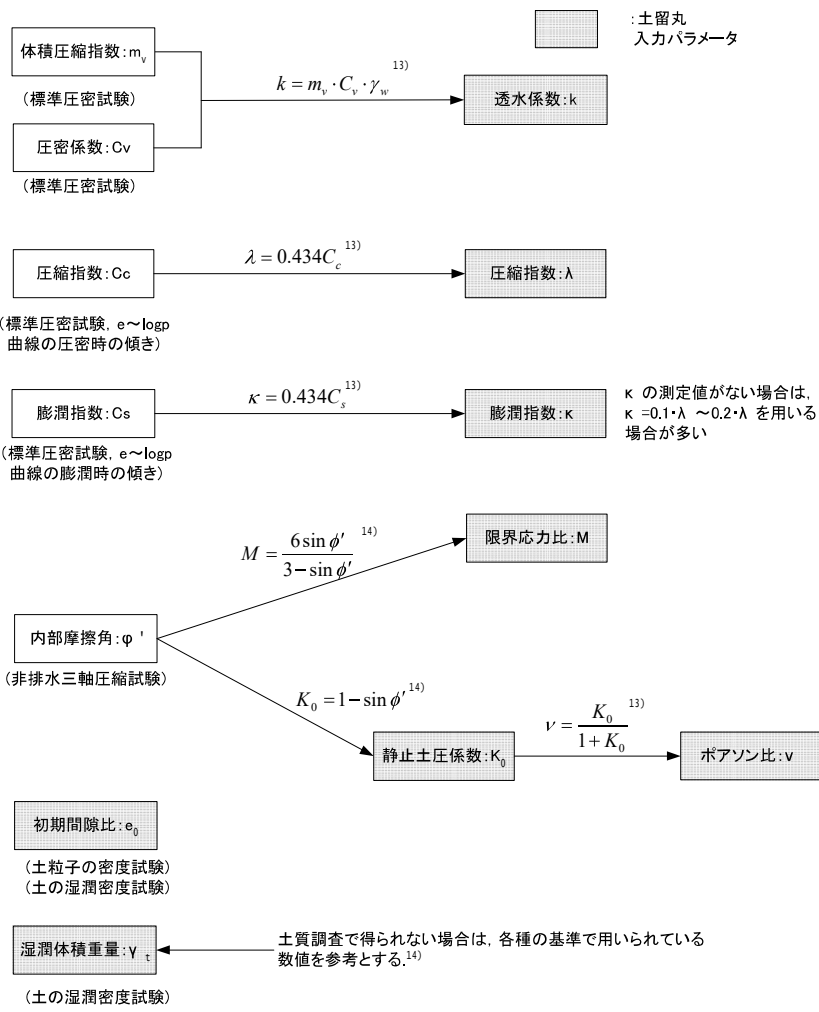
$$\nu' = \frac{K_0^{(NC)}}{1 + K_0^{(NC)}} \quad (3.3.5.5)$$

以上の方法を用いて地盤の変形に対する土/水連成解析に用いる土質パラメータは決定される。しかし、これらのパラメータの個々の精度は等価ではなく、非常に精度の高いものから経験的で根拠のあいまいなものが混在している。また、常に個々の土質パラメータの決定に必要な土質試験が行なわれることはないから、より実用性を重視した土質パラメータの推定法が必要となってくる。こうしたニーズに応える研究成果も報告されている。Iizuka と Ohta²⁵⁾は標準圧密試験やせん断試験を用いていくつかのパラメータを求め、静止土圧係数、内部摩擦角、圧密係数に対して塑性指数 I_p から直接決定する方法を提案している。Kamei^{26), 27)} および Nakase et al.²⁸⁾は広範な土の種類への適応性と簡便性という観点から、各種土質定数は塑性指数 I_p のみによって決定する方法を提案している。

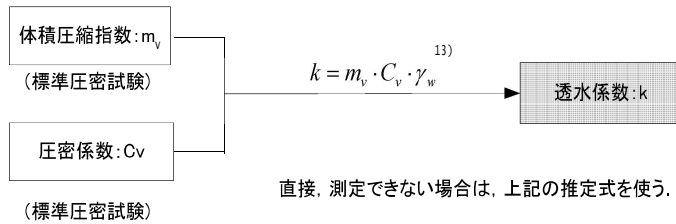
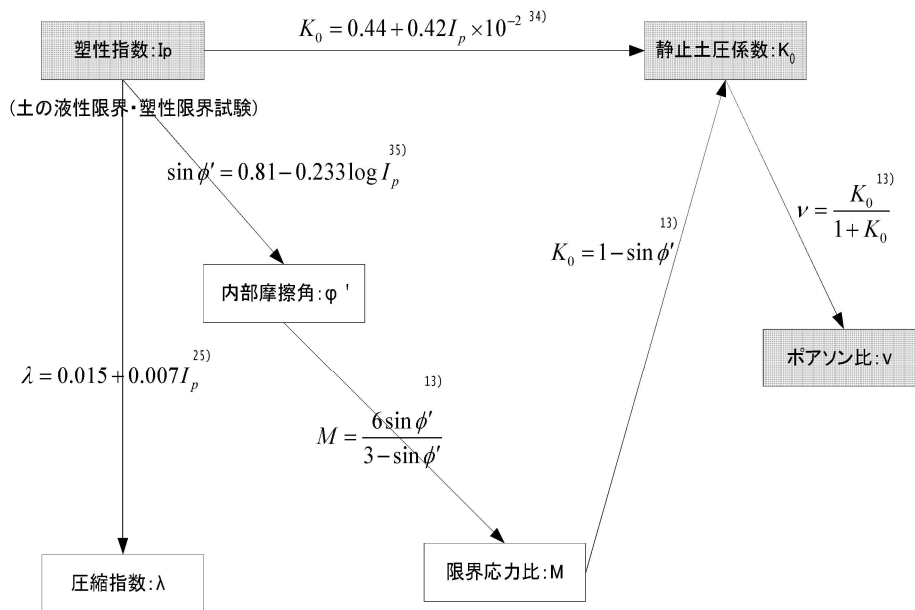
□ 圧縮指数	$\lambda = 0.02 + 0.0045I_p$	
□ 膨潤指数	$\kappa = 0.00084(I_p - 4.6)$	
□ 初期間隙比	$e_0 = N - 1.0 = 0.517 + 0.019I_p$	(3.3.5.6)
□ 限界応力比	$M = 1.65$	
□ ダイラタンシー係数	$D = 0.00082I_p + 0.0159$	

この決定法によって得られた土質定数による解析結果は要素試験(三軸試験)^{28)~31)}、モデル実験(遠心载荷試験)²⁶⁾、³⁰⁾、実地盤の変形挙動^{32), 33)}を非常に良く表現できることが実証されている。土留丸の土質定数入力画面には、この塑性指数からの推定式(3.3.5.6)による自動計算が装備されている。

また、Cam Clay 弾塑性モデルの土質定数決定フローを以下に示す。



塑性指数を用いる場合



湿潤体積重量: γ_t ← 土質調査で得られない場合は、各種の基準で用いられている数値を参考とする。 (14)

3.3.6. Cam Clay弾塑性モデルの局所安全率

実際に地盤が破壊する際には、すべり面が表れる場合が多く観測されるが、すべり面全体で同時に破壊することは少なく、ある時点で発生した局所的な降伏あるいは破壊が順次拡大し、ついには全体の崩壊に至るといった経過をたどることは明らかである。このような破壊が徐々に進行して行く様相を進行性破壊と呼ぶ。この地盤内土要素の進行性破壊を表す指標の1つとして局所安全率がある。

局所安全率はこれまで岩盤斜面の切土安定評価の際に、有限要素法を用いた解析の例³⁸⁾があるが、その報告では図3-10のようにモールクーロン破壊規準を用いて主応力より、

$$SC = \frac{\sigma_{1f} - \sigma_{3f}}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad (3.3.6.1)$$

$$= \frac{(\sigma_1 + \sigma_3 - 2p_w) \sin \phi' + 2c' \cdot \cos \phi'}{\sigma_1 - \sigma_3},$$

を計算し、この $SC \geq 1.0$ であれば安定性は保たれているが、 $SC < 1.0$ の場合には土要素は破壊する（安全性は保たれない）と仮定されている。したがって式（3.3.6.1）を用いて各要素の SC を計算し、その分布を調べれば地盤内の破壊領域が分かり、安全性の評価ができる。

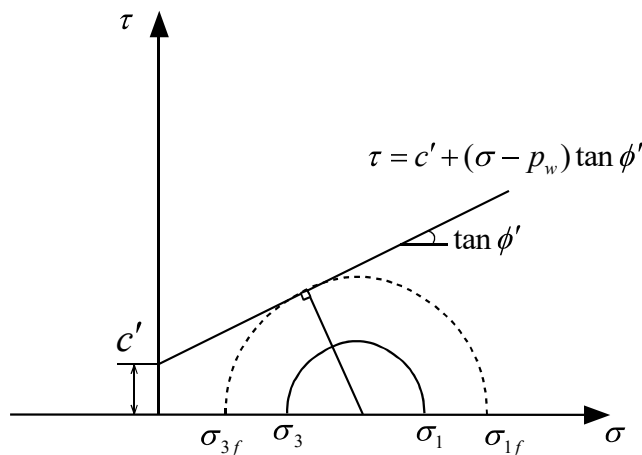


図 3-10 モール円を用いた局所安全率の概念図.

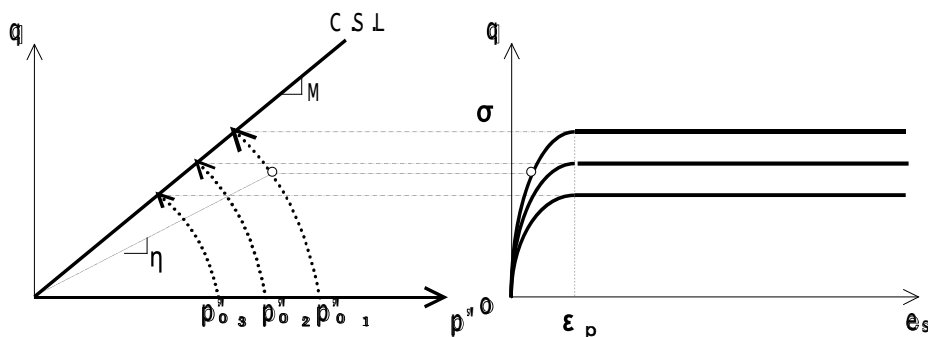


図 3-11 Cam Clay モデルにおける非排水パスと応力ひずみ関係.

一方、Cam Clay 弾塑性モデルに対する局所安全率はこの考えを拡張し、限界応力比を用いて以下のように定義する。

$$\alpha := \frac{M}{\eta} . \quad (3.3.6.2)$$

ここで $\eta (=q/p')$ は応力比と呼び、図 3-11 のように $p'-q$ 空間内での傾きを表す。すなわち、局所安全率 α はその点で非排水変形させた場合の限界状態線 (Critical State Line, C.S.L) の傾きと、現在の $p'-q$ 関係の傾きの比となる。なお、各点で非排水状態の場合、せん断が進行すると限界状態線上で止まり $\alpha=1.0$ となるが、「土留丸」で採用している土/水連成解析においては、各点で排水状態、すなわち間隙水が自由に移動できる状態としているので、限界状態線を越えて吸水軟化することもあり、その時は $\alpha < 1.0$ となることもあり得る。

4. 支保工ライブラリ

4.1. 土留め壁(鋼矢板)モデル

4.1.1. 土留め壁(鋼矢板)のモデル化

従来、土留め壁を有限要素法に組み込む場合、主に梁理論による有限要素解析が用いられてきた。梁要素は梁理論に基づいて定式化されており、地盤の要素の節点に面積ゼロの線要素を重ねれば良く、簡便さから要素数の増大を招かないなどの理由により汎用されてきたと考えられる。しかし、通常用いられる梁要素であると、変位を表す形状関数に回転角を含み、土の部分の平面要素と梁要素で変位が適合しない(変位のくい違いが生じる)などの問題があった。近年、計算機の高速度とメモリ容量の画期的な増大に伴い、要素の増大はそれほど問題とならなくなったことより、土留め

壁を平面要素で近似することを採用した。その際、土留め壁の安定照査の為、曲げモーメント、せん断力を求める必要があるが、本ソフトにおいては、有限要素法で計算される等価節点力により計算している。

等価節点力の計算は、要素内部の応力を用いて、

$$F_i^{eq} = \int_{V_e} [B]^T \{\sigma\} dv, \quad (4.1.1.1)$$

で計算し、当該節点に内接する要素からの上式の値を合算する。その等価節点力を用いて、せん断力 Q は求めたい箇所より上部の等価節点力の合算として、

$$Q = \sum_i F_i^{eq}, \quad (4.1.1.2)$$

で求める。また、曲げモーメント M は求めたい箇所より上部の等価節点力と、その位置までの長さの積の合算として、

$$M = \sum_i F_i^{eq} L_i, \quad (4.1.1.3)$$

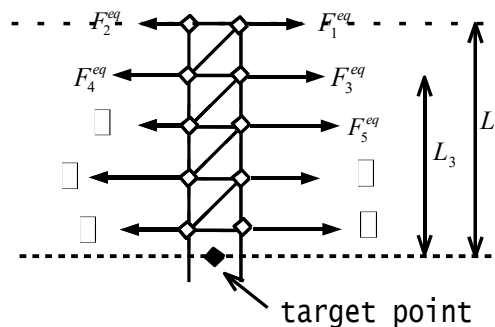


図 4-2 等価節点力

で求める。

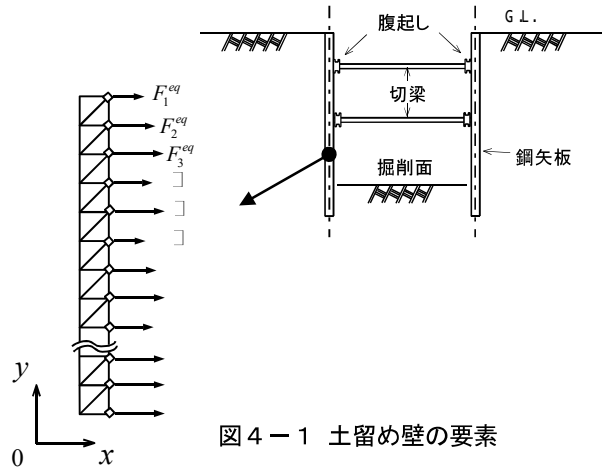


図 4-1 土留め壁の要素

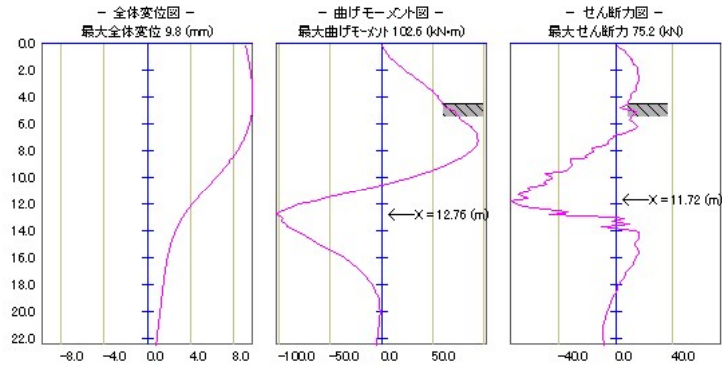


図 4-3 土留め壁の変位図、曲げモーメント図、せん断力図

また、鋼矢板の実際の形状は、図4-4のようになっており、これを連続体要素に近似する際、曲げ剛性を等価にするよう換算している。

$$E' = \frac{EI}{I'} \quad (4.1.1.4)$$

ここで E は鋼矢板のヤング率、 I は鋼矢板の断面2次モーメントであり、 E' は等価要素のヤング率、 I' は次式に示す、等価要素の断面2次モーメントである。

$$I' = \frac{bh^3}{12} \quad (4.1.1.5)$$

これを概念的に表した図が、図4-5である。

ただし、一般に用いる U 形鋼矢板では曲げに対する継手部分のずれが無視できない。鋼矢板のカタログ等に表示されている単位幅あたりの断面係数及び断面 2 次モーメントの値は、継手部分にずれが生じないと仮定した時の計算値であることから、断面算定および山留め壁の応力・変形の算定に際してはこれらの値から低減する必要がある。一般には、ずれを無視した場合の単位幅あたりの値に対して、打ち込み工法などでは断面 2 次モーメントで 45~60%、断面係数で 60~80% 程度とし、セメントミルクやソイルセメントの固化材中に設置される場合にはこれらの値を適宜割増してよい。

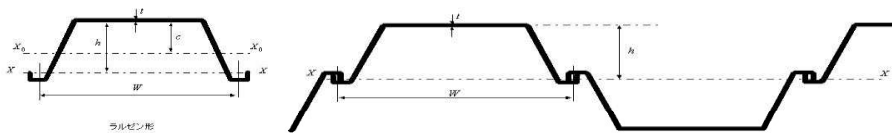


図 4-4 鋼矢板の形状

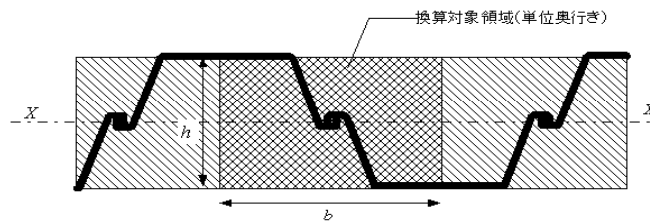


図 4-5 土留め壁（鋼矢板）と等価要素の剛性換算

4.1.2. 土留め壁(鋼矢板)の入力値に関して

土留め壁 ✖

土留め壁 土留め壁 追加 変更 削除

土留め壁の材質

種別名 SP-Ⅲ 鋼矢板の選択

単位体積重量(kN/m ³)	1.471
断面二次モーメント(cm ⁴ /m)	17400
断面係数(cm ³ /m)	1340

土留め壁の設定

位置 X(m)	7.000	<input type="checkbox"/> マウス入力	
土留め壁幅(m)	0.260	弾性係数 (N/mm ²)	200000.00
突出長(m)	0.100	ポアソン比	0.30
地中長(m)	5.500		

低減係数

断面二次モーメントを低減(45~60%) (%)

断面係数を低減(60~80%) (%)

閉じる

図 4-6 土留め壁諸元入力画面

土留め壁は標準で鋼矢板が採用されているとしており、図4-6のように入力値としては

1. 単位体積重量 (kN/m³)
2. 断面二次モーメント (cm⁴/m) [壁幅1m当り]
3. 断面係数 (cm³/m) [壁幅1m当り]
4. 壁幅 (m)
5. 弾性係数 (N/mm²)
6. ポアソン比 (-)

が必要である。その代表的な諸元は以下の表に与える³⁶⁾。

表 4 - 1 U型鋼矢板

種類	壁幅(mm)	単位体積重量 壁幅1m当り (kg / m ²)	断面二次モーメント 壁幅1m当り (cm ⁴ / m)	断面係数 壁幅1m当り (cm ³ / m)
SP-II	200	120	8740	874
SP-III	250	150	16800	1340
SP-III	260	150	17400	1340
SP-IV	340	190	38600	2270
SP-I A	170	88.8	4500	529
SP-II A	240	108	10600	880
SP-III A	300	146	22800	1520
SP-IV A	370	185	41600	2250
SP-V L	400	210	63000	3150
SP-VIL	450	240	86000	3820
SP-II W	260	103	13000	1000
SP-III W	360	136	32400	1800
SP-IV W	420	177	56700	2700

4.2. 切梁(H形鋼)モデル

4.2.1. 切梁(H形鋼)のモデル化

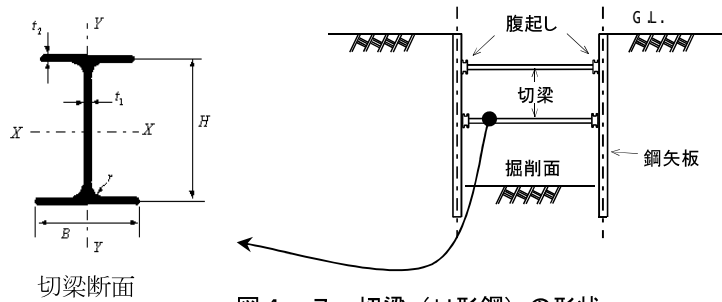


図4-7 切梁(H形鋼)の形状

切梁(H形鋼)の実際の形状は、図4-7のようになっており、これを連続体要素に近似する際、軸剛性を等価にするよう「土留丸」内部で自動換算している。

$$E' = \frac{EA}{A'} \quad (4.2.1.1)$$

ここで E はH形鋼のヤング率、 A はH形鋼の断面積あり、 E' は等価要素のヤング率、 A' は下図のような等価要素の断面積である。

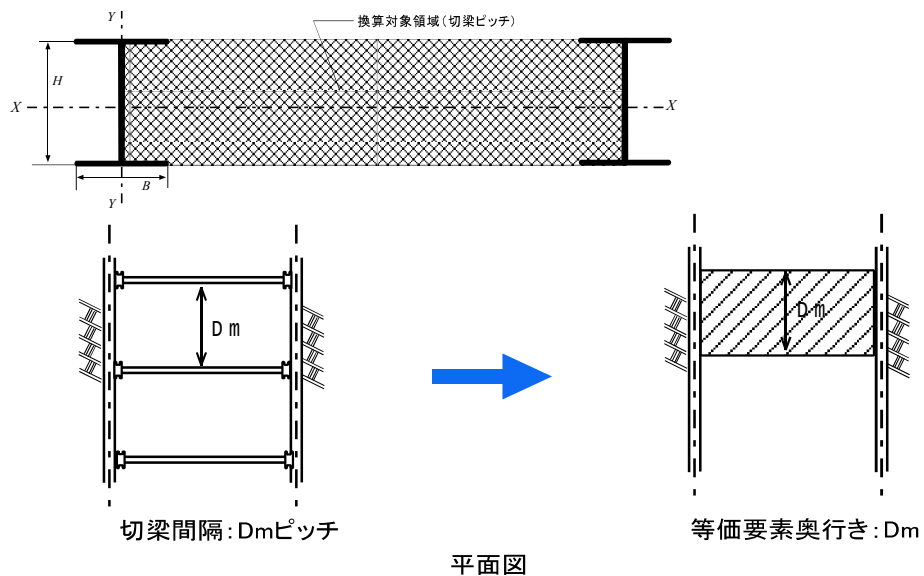


図4-8 切梁の等価要素

$$A' = H \times D \quad (4.2.1.2)$$

ここで H は切梁高さ、 D は切梁ピッチである。

4.2.2. 切梁(H形鋼)の入力値に関して

切梁

切梁 切梁 [追加] [変更] [削除]

切梁の材質

種別名 300×150 [形鋼の選択]

高さ H(m)	0.300
幅 B(m)	0.150
断面積(cm ²)	46.80
二次モーメント(cm ⁴)	7210.00
断面係数(cm ³)	481.00

切梁の設定

	X座標(m)	Y座標(m)
1	7.130	6.000
2	12.870	6.000

マウス入力

切梁ピッチ(m)	5.00
弾性係数(N/mm ²)	20000.00
ポアソン比	0.30
プレロード(kN)	50.00

切梁設置時に影響をリセットする

閉じる

図4-9 切梁(H形鋼)諸元入力画面

切梁は標準でH形鋼が採用されていると考えており、図4-9のように入力値としては

1. 高さ (m)
2. 幅 (m)
3. 断面積 (cm²)
4. 断面二次モーメント (cm⁴/m) [壁幅1m当り]
5. 断面係数 (cm³/m) [壁幅1m当り]
6. 切梁ピッチ(m)
7. 弾性係数 (N/mm²)
8. ポアソン比 (-)
9. プレロード (kN)

が必要である。その代表的な諸元は以下の表に与える³⁷⁾。

表 4-2 H 形鋼

区分	シリーズ	寸法 mm					断面積 cm ²	単位質量 kg/m	断面二次モーメント cm ⁴		断面二次半径 cm		断面係数 cm ³	
		H	B	t _f	t _w	r			A	W	I _x	I _y	i _x	i _y
細 幅 系 列	150×75	150	75	5	7	8	17.85	14.0	666	49.5	6.11	1.66	88.8	13.2
	175×90	175	90	5	8	8	22.90	18.0	1210	97.5	7.26	2.06	138	21.7
	200×100	200	100	5.5	8	8	26.67	20.9	1810	134	8.23	2.24	181	26.7
	250×125	250	125	6	9	8	36.97	29.0	3960	294	10.4	2.82	317	47.0
	300×150	300	150	6.5	9	13	46.78	36.7	7210	508	12.4	3.29	481	67.7
	350×175	350	175	7	11	13	62.91	49.4	13500	984	14.6	3.96	771	112
	400×200	400	200	8	13	13	83.37	65.4	23500	1740	16.8	4.56	1170	174
	450×200	450	200	9	14	13	95.43	74.9	32900	1870	18.6	4.43	1460	187
	500×200	500	200	10	16	13	112.2	88.2	46800	2140	20.4	4.36	1870	214
600×200	600	200	11	17	13	131.7	103	75600	2270	24.0	4.16	2520	227	
中 幅 系 列	150×100	148	100	6	9	8	26.35	20.7	1000	150	6.17	2.39	135	30.1
	200×150	194	150	6	9	8	38.11	29.9	2630	507	8.30	3.65	271	67.6
	250×175	244	175	7	11	13	55.49	43.6	6040	984	10.4	4.21	492	112
	300×200	294	200	8	12	13	71.05	55.8	11100	1600	12.5	4.75	756	160
	350×250	340	250	9	14	13	99.53	78.1	21200	3650	14.6	6.05	1250	292
	400×300	390	300	10	16	13	133.2	105	37900	7200	16.9	7.35	1940	480
	450×300	440	300	11	18	13	153.9	121	54700	8110	18.9	7.26	2490	540
	500×300	488	300	11	18	13	159.2	125	68900	8110	20.8	7.14	2820	540
	600×300	588	300	12	20	13	187.2	147	114000	9010	24.7	6.94	3890	601
	700×300	700	300	13	24	18	231.5	182	197000	10800	29.2	6.83	5640	721
	800×300	800	300	14	26	18	263.5	207	286000	11700	33.0	6.67	7160	781
	900×300	890	299	15	23	18	266.9	210	339000	10300	35.6	6.20	7610	687
		900	300	16	28	18	305.8	240	404000	12600	36.4	6.43	8990	842
		912	302	18	34	18	360.1	283	491000	15700	36.9	6.59	10800	1040
918		303	19	37	18	387.4	304	535000	17200	37.2	6.67	11700	1140	
広 幅 系 列	100×100	100	100	6	8	8	21.59	16.9	378	134	4.18	2.49	75.6	26.7
	125×125	125	125	6.5	9	8	30.00	23.6	839	293	5.29	3.13	134	46.9
	150×150	150	150	7	10	8	39.65	31.1	1620	563	6.40	3.77	216	75.1
	175×175	175	175	7.5	11	13	51.42	40.4	2900	984	7.50	4.37	331	112
	200×200	200	200	8	12	13	63.53	49.9	4720	1600	8.62	5.02	472	160
	250×250	250	250	9	14	13	91.43	71.8	10700	3650	10.8	6.32	860	292
	300×300	300	300	10	15	13	118.4	93.0	20200	6750	13.1	7.55	1350	450
	350×350	350	350	12	19	13	171.9	135	39800	13600	15.2	8.89	2280	776
	400×400	400	400	13	21	22	218.7	172	66600	22400	17.5	10.1	3330	1120
		414	405	18	28	22	295.4	232	92800	31000	17.7	10.2	4480	1530
		428	407	20	35	22	360.7	283	119000	39400	18.2	10.4	5570	1930
		458	417	30	50	22	528.6	415	187000	60500	18.8	10.7	8170	2900
		498	432	45	70	22	770.1	605	298000	94400	19.7	11.1	12000	4370
500×500	500	500	25	25	26	368.3	289	163000	52200	21.0	11.9	6520	2090	

注) サイズ等については直接メーカーにご相談ください。
 新日本製鉄、NKK、川崎製鉄、住友金属工業、東京製鉄、大和工業ほか。

4.2.3. 切梁設置時影響リセット機能について

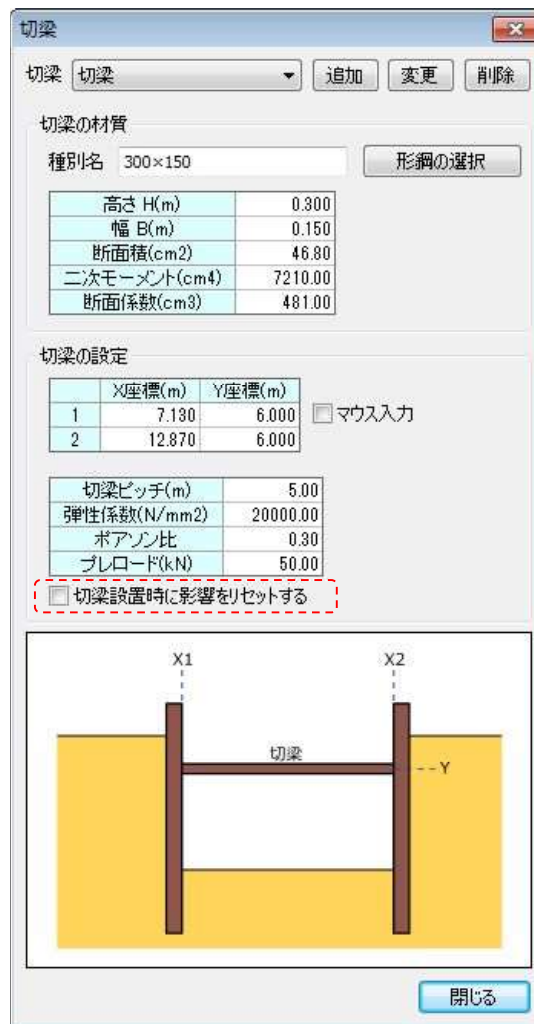


図 4-10 切梁 (H 形鋼) 諸元入力画面

土留掘削・切梁設置などの施工段階解析を行うにあたり、変形した土留壁に切梁を接合(節点を共有)すると切梁内に高い応力が発生し、力の釣り合いを取る(収束計算する)と、土留壁が反り返るなど、不自然な挙動を取ることがある。

「土留丸」では、そのような際、切梁内の設置時ひずみ・設置時応力の影響をリセットして以後の解析を実行する機能として、「切梁設置時影響リセット機能」を持っている。

以下にその機能の理論について説明する。

「土留丸」では、要素内部のひずみ・応力を次式で計算している。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = [\mathbf{B}]\mathbf{u}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (4.2.3.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\sigma}_n + [\mathbf{C}^e](\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n) \quad (4.2.3.2)$$

ここで $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 、 $\boldsymbol{\sigma}_n$ は対象としている時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ 内の初期の時刻 t_n でのひずみ、応力(例えば掘削工程で考えると、掘削前のひずみ、応力)であり(一般に既知量)、 \mathbf{u}_{n+1} 、 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ は求める時刻 t_{n+1} での変位、ひずみ(例えば掘削工程で考えると掘削後の変位、ひずみ)である(一般に未知量)。また $[\mathbf{B}]$ 、 $[\mathbf{C}^e]$ は通常の有限要素法で用いられる B マトリクス、弾性マトリクスである。

σ_{n+1}^{trial} は試行弾性応力といい、「土留丸」の特徴である陰解法弾塑性計算で用いられる応力であるが、切梁のような弾性体の場合は、次式のように通常の応力と一致する。

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}^{trial} &\rightarrow \text{return mapping} \rightarrow \sigma_{n+1}(\text{elastic-plastic}) \\ \sigma_{n+1}^{trial} &= \sigma_{n+1}(\text{elastic})\end{aligned}\quad (4.2.3.3)$$

この変位からひずみ、応力の計算手法により、初期切梁変位があると擬似ひずみ、擬似応力が発生し、それらが設置後の力のつりあい、軸力の計算に影響を与える。この擬似応力、擬似ひずみを取り除く方法を、切梁設置ステップ、設置後のステップに分けて考える。

(1) 切梁設置(初期切梁変位による)ステップ

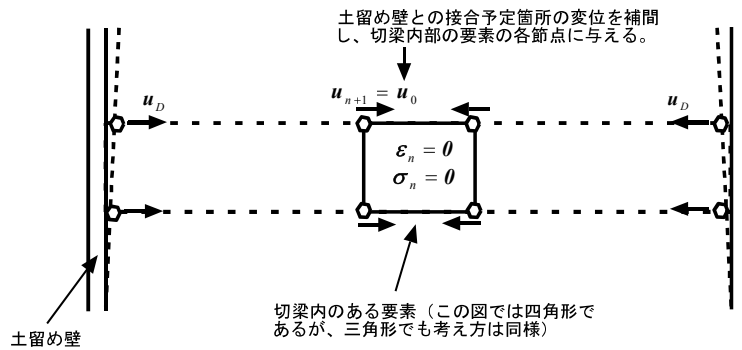


図 4-11 初期切梁変位による切梁内要素の変形

このステップでは先行変位による切梁内の要素内に発生する擬似ひずみ ϵ_{pd} 、擬似応力 σ_{pd} を計算する。式(4.2.3.1)に初期切梁変位 $u_{n+1} = u_0$ を代入すると

$$\epsilon_{n+1} = [B] u_0 = \epsilon_{pd} \quad (4.2.3.4)$$

と擬似ひずみ ϵ_{pd} が計算され、これを式(4.2.3.2)に代入すると、

$$\sigma_{n+1} = 0 + [C^e](\epsilon_0 - 0) = \sigma_{pd} \quad (4.2.3.5)$$

と擬似応力 σ_{pd} が計算される。

この擬似応力で土留壁等と力のつりあいを考慮すると、土留め壁内部等に発生するはずのない高い応力が発生するので(実際には、ジャッキ等で切梁長さを調節し設置するため発生は考えられない)、切梁に含まれる要素のみで力がつりあうよう収束計算を行い、その際、計算された変位、ひずみ、応力を以後の解析で、それぞれ初期変位 u_0 、初期ひずみ ϵ_0 、初期応力 σ_0 として与える。

$$\epsilon_0 := \epsilon_{pd} = [B] u_0 \quad (4.2.3.6)$$

$$\sigma_0 := \sigma_{pd} = [C^e] \epsilon_0 \quad (4.2.3.7)$$

(2) 設置後の計算ステップ(初期ひずみ、初期応力がその後のステップに影響しないことの説明)

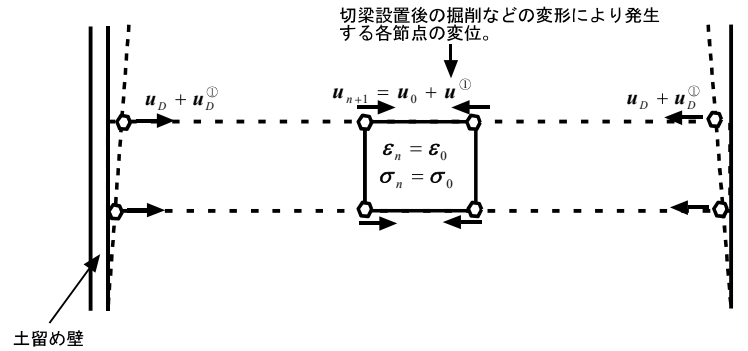


図 4-12 切梁設置後の切梁内要素の変形

切梁設置ステップ終了後、掘削などにより土留壁の変形が増加した場合で、初期切梁変位が切梁内部のひずみ、応力に影響ないかをチェックする。掘削により切梁が圧縮され、切梁内部要素の変位が $u^{(1)}$ 増加したとする。これを含めた変位 u_{n+1} を式(4.2.3.1)に代入すると

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{n+1} &= [B](u_0 + u^{(1)}) - \varepsilon_0 \\
 &= \varepsilon_0 + [B]u^{(1)} - \varepsilon_0 \\
 &= [B]u^{(1)}
 \end{aligned}
 \tag{4.2.3.8}$$

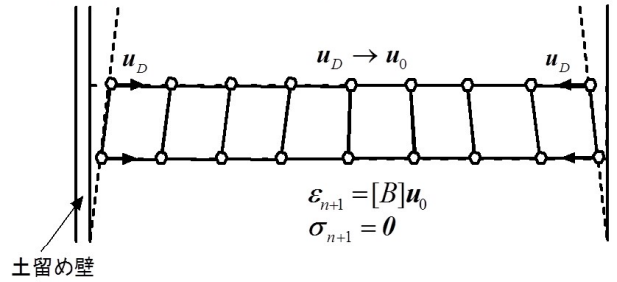
となる。よって、擬似ひずみ(初期ひずみ)の影響は取り除かれており、変位増加分のみのひずみとなる。これを式(4.2.3.2)に代入して応力を計算すると、

$$\begin{aligned}
 \sigma_{n+1} &= \sigma_n + [C^e](\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) \\
 &= \sigma_0 + [C^e]\varepsilon_{n+1} - \sigma_0 \\
 &= [C^e]\varepsilon_{n+1}
 \end{aligned}
 \tag{4.2.3.9}$$

のように、擬似応力(初期応力)の影響は取り除かれていることがわかる。

具体的には以下の2ステップの手順で計算を行なっている。

- ① 土留め壁との接合予定箇所の変位を補間し、切梁内部の要素の各節点に与える。



- ② 切梁端の節点を固定し、切梁内部の要素で力をつり合わせ、変位、ひずみ、応力を更新する。

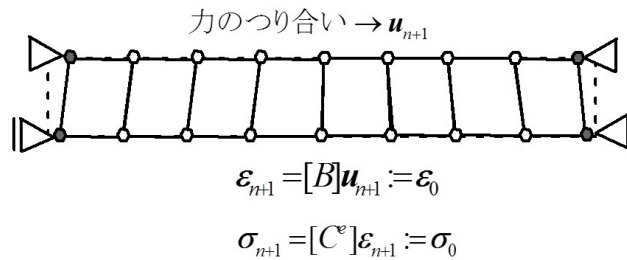
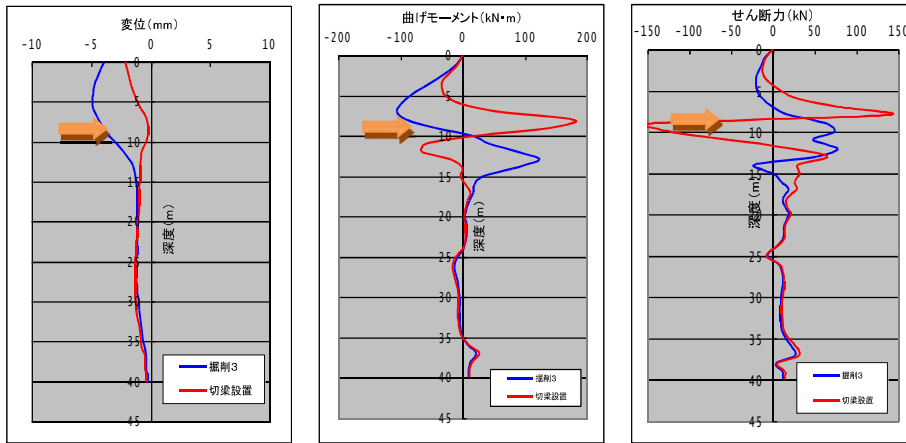


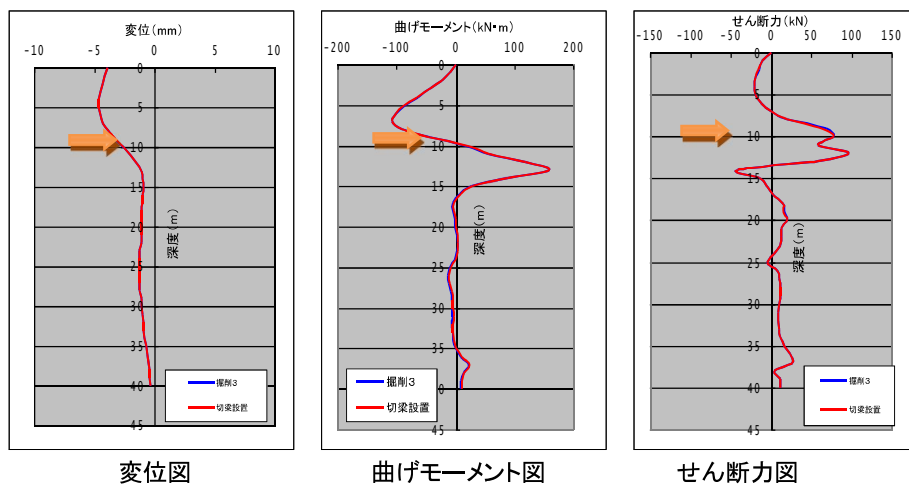
図 4-13 初期切梁変位考慮の手順

また、この機能を使用した場合としない場合の比較結果例を以下に示す。



変位図 曲げモーメント図 せん断力図

図 4-14 切梁設置時影響リセット機能を使用しない場合



変位図 曲げモーメント図 せん断力図
 図4-15 切梁設置時影響リセット機能を使用する場合

図4-14、図4-15ともに図中、オレンジ矢印位置が切梁設置位置、青線が切梁設置前、赤線が切梁設置後の土留壁の変位、曲げモーメント、せん断力図である。

図4-14のように、切梁設置時影響リセット機能を使用しない場合、切梁設置の前後で、土留壁が切梁に押されて変位が戻っていることがわかるが、切梁設置時影響リセット機能を使用した図4-15では、切梁設置の前後で、土留壁の挙動に影響を与えていないことが確認できる。

4.3. アンカーモデル

4.3.1. アンカーのモデル化

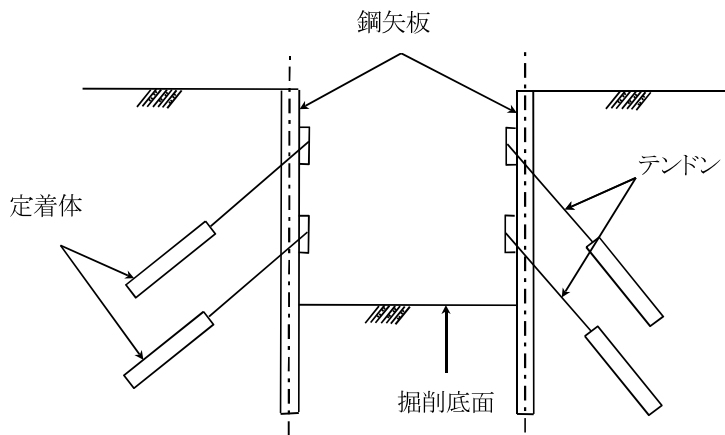


図 4-16 アンカー付き土留め概要図

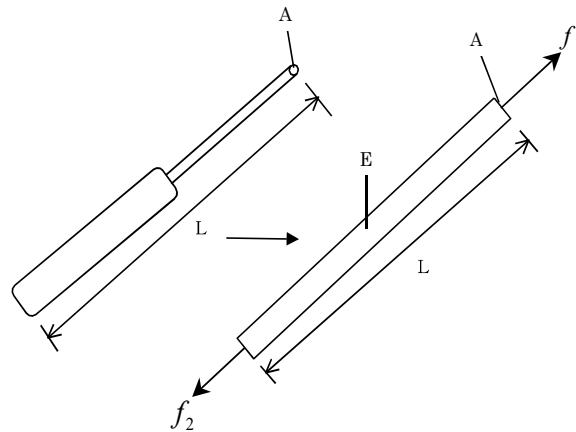


図 4-17 アンカーのモデル化

アンカーの実際の形状は図 4-16 のようになっているが、土留丸ではアンカーを一次元の均質な棒要素(アンカー要素)と考える。アンカー要素に作用する力 $f_1 (= -f_2)$ と、2点の変位差 $\Delta u (= u_1 - u_2)$ には

$$f_1 = -f_2 = \frac{EA}{L} \Delta u \quad (4.3.1.1)$$

の関係がある。ここで E はアンカーの弾性係数であり、 A は断面積、 L はアンカー長である。

これを有限要素法の内部に組み込む際には、対応する2点間の剛性マトリクスに

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4.3.1.2)$$

を重ねる。

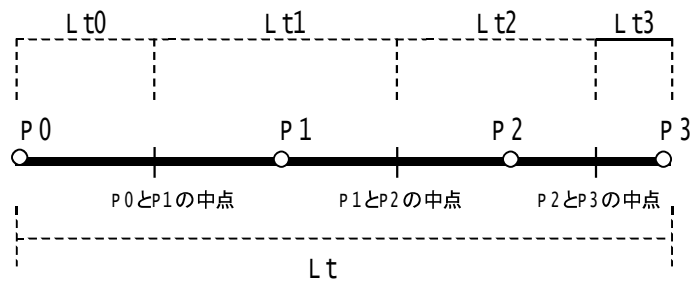


図 4-18 定着体内での力の分配

定着体が複数の節点で表されるとき、 f_2 の力は各節点に分配して作用する。たとえば、節点 P0, P1, P2, P3 に分配して力が作用するときは、次の表のように力が分配される。

表 4-3 節点と作用する力

節点	作用する力
P0	$f_{p0} = -f_2 \frac{Lt_0}{Lt}$
P1	$f_{p1} = -f_2 \frac{Lt_1}{Lt}$
P2	$f_{p2} = -f_2 \frac{Lt_2}{Lt}$
P3	$f_{p3} = -f_2 \frac{Lt_3}{Lt}$

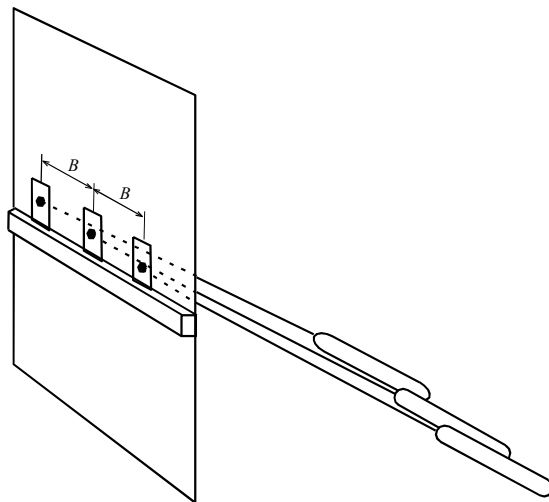


図 4-19 アンカーピッチ概要図

実際、アンカーは水平間隔 B [m/本] で打設される。このアンカーピッチと言われる効果を厳密に考慮するためには3次元解析を行わなければならないが、2次元平面ひずみ解析で近似的に解を得るためには、次のように剛性が等しくなるよう考える。

$$\frac{EA}{L} = \frac{E'AB}{L} \quad (4.3.1.3)$$

よって等価弾性係数 E' は、

$$E' = \frac{E}{B} \quad (4.3.1.4)$$

となる。

また、アンカー長 L は、初期緊張力による初期の伸びを考慮すると、

$$L_0 = \frac{EA}{EA + P_i} L \quad (4.3.1.5)$$

となる。ここで、 P_i は初期緊張力である。土留丸では、この長さ L_0 をアンカー計算時にアンカー長 L の代わりに用いている。

結局、テンドン内の節点での力の分配、アンカーピッチ、初期の伸びアンカーピッチを考慮した棒要素の力とのびの関係は、

$$f_1 = -(f_{p0} + f_{p1} + f_{p2} + f_{p3}) = \frac{E'A}{L_0 B} \Delta u \quad (4.3.1.6)$$

となる。これを先程と同様に有限要素法に組み込む際には、対応する節点での剛性マトリクスに

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_{p0} \\ f_{p1} \\ f_{p2} \end{Bmatrix} = \frac{E'A}{L_0 B} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_{p0} \\ u_{p1} \\ u_{p2} \end{Bmatrix} \quad (4.3.1.7)$$

を重ねる。

4.3.2. アンカーの入力値

アンカー 追加 変更 削除

アンカー種別 アンカーの選択

弾性係数(kN/mm ²)	
テンドン断面積(mm ²)	

アンカー設定

基点の位置	X(m)		<input type="checkbox"/> マウス入力
	Y(m)		
基点からの離れ(m)			打設方向
			<input type="radio"/> 左 <input checked="" type="radio"/> 右

傾角(°)	
水平間隔(m)	
自由長(m)	
アンカー体長(m)	
初期緊張力(kN)	

閉じる

図 4-20 アンカー諸元入力画面

アンカーの設定時には、図 4-20 のように入力値としては、

1. 弾性係数 (kN/mm²)
2. テンドン断面積 (mm²)
3. 傾角(°)
4. 水平間隔 (m)
5. 自由長 (m)
6. アンカー体長 (m)
7. 初期緊張力 (kN)

が必要である。その代表的な諸元は以下の表に与える。

表 4-4 各種アンカー諸元

アンカー名	呼び名	テンドン断面積(mm ²)	弾性係数(kN/mm ²)
EGS 永久アンカー	D23	415.5	186
EGS 永久アンカー	D26	530.9	186

アンカー協会 H14 p.72 (住友電気工業(株))

アンカー名	呼び名	テンドン断面積(mm ²)	弾性係数(kN/mm ²)
KTB・引張型 SC アンカー	K5-10H	987.1	196
KTB・引張型 SC アンカー	K5-11H	1085.8	196

アンカー協会 H14 p.44 ((株)ケーティビー)

アンカー名	呼び名	テンドン断面積(mm ²)	弾性係数(kN/mm ²)
OPC アンカー	OPC-1	98.7	186
OPC アンカー	OPC-2	197.4	186

アンカー協会 H14 p.90 (岡部土木(株))

アンカー名	呼び名	テンドン断面積(mm ²)	弾性係数(kN/mm ²)
PC ねじこん	26	548	200
PC ねじこん	32	806	200

アンカー協会 H14 p.74 (神鋼鋼線工業(株))

アンカー名	呼び名	テンドン断面積(mm ²)	弾性係数(kN/mm ²)
PDG アンカー	PDG-2	197.4	186
PDG アンカー	PDG-3	296.1	186

アンカー協会 H14 p.98 (岡部土木(株))

アンカー名	呼び名	テンドン断面積(mm ²)	弾性係数(kN/mm ²)
SEEE グラウンドアンカー	F100	519.3	186
SEEE グラウンドアンカー	F100TA	519.3	186

アンカー協会 H14 p.58 ((株)エスイー)

アンカー名	呼び名	テンドン断面積(mm ²)	弾性係数(kN/mm ²)
SHS 永久アンカー	S5-10	987.1	186
SHS 永久アンカー	S5-11	1085.8	186

アンカー協会 H14 p.48 (エスエイチエステック(株))

アンカー名	呼び名	テンドン断面積(mm ²)	弾性係数(kN/mm ²)
SSL-CE 型永久アンカー	35CE12.7-1	98.7	186
SSL-CE 型永久アンカー	35CE17.8-1	208.4	186

メーカー資料 (サンスイエンジニアリング(株))

アンカー名	呼び名	テンドン断面積(mm ²)	弾性係数(kN/mm ²)
SSL 永久アンカー	130M15.2-6	832.2	189
SSL 永久アンカー	130M17.8-5	1042	189

メーカー資料, 製品カタログ (サンスイエンジニアリング(株))

アンカー名	呼び名	テンドン断面積(mm ²)	弾性係数(kN/mm ²)
ゲビンデスターブ PC 鋼棒	D23	415.5	200
ゲビンデスターブ PC 鋼棒	D26	530.9	200

製品カタログ (住友電気工業(株))

アンカー名	呼び名	テンドン断面積(mm ²)	弾性係数(kN/mm ²)
スーパーフロテックアンカー	SFL-1	138.7	186
スーパーフロテックアンカー	SFL-2	277.4	186

製品カタログ (フロテックアンカー技術研究所(住友電気工業(株)内))

アンカー名	呼び名	テンドン断面積(mm ²)	弾性係数(kN/mm ²)
ネジボン	22	387.1	200
ネジボン	25	506.7	200

製品カタログ (弘和産業(株))

アンカー名	呼び名	テンドン断面積(mm ²)	弾性係数(kN/mm ²)
フロテックアンカー	FL0-1	138.7	186
フロテックアンカー	FL0-2	277.4	186

製品カタログ (フロテックアンカー技術研究会(住友電気工業(株)内))

アンカー名	呼び名	テンドン断面積(mm ²)	弾性係数(kN/mm ²)
荷重分散型 KTB 永久アンカー	KL6-10	1387.0	196
荷重分散型 KTB 永久アンカー	KL6-2	277.4	196

アンカー協会 H14 p.39 ((株)ケーティービー)

これらを含む、より多くのアンカー諸元は、アンカー選択ボタンを押すと次のようなダイアログが表示され、それを選択することで入力できます。

アンカー種別	呼び名	引張荷重(kN)	降伏荷重(kN)	断面積(mm ²)	弾性係数(kN/mm ²)
1 仮設アンカー [設置式]	5-2	366	312	197.40	186
2 仮設アンカー [設置式]	5-3	549	468	296.10	186
3 仮設アンカー [設置式]	5-4	732	624	394.80	186
4 仮設アンカー [設置式]	5-5	915	780	493.60	186
5 仮設アンカー [設置式]	5-6	1098	936	592.30	186
6 仮設アンカー [設置式]	5-7	1281	1092	691.00	186
7 仮設アンカー [設置式]	5-8	1464	1248	789.70	186
8 仮設アンカー [設置式]	5-9	1647	1404	888.40	186
9 仮設アンカー [設置式]	5-10	1830	1560	987.10	186
10 仮設アンカー [設置式]	5-11	2013	1716	1085.80	186
11 仮設アンカー [設置式]	5-12	2196	1872	1184.50	186
12 KJS除去アンカー	J5-2(B)	366	312	197.40	195
13 KJS除去アンカー	J5-4(A)	732	624	394.80	195
14 KJS除去アンカー	J5-4(B-B)	732	624	394.80	195
15 KJS除去アンカー	J5-6(A-B)	1098	936	592.30	195
16 KJS除去アンカー	J5-6(B-B-B)	1098	936	592.30	195
17 KJS除去アンカー	J5-8(A-A)	1464	1248	789.70	195
18 KJS除去アンカー	J5-8(B-B-B-B)	1464	1248	789.70	195
19 KJS除去アンカー	J5-10(A-A-B)	1830	1560	987.10	195
20 KJS除去アンカー	J5-10(B-B-B-B-B)	1830	1560	987.10	195

図 4-21 アンカー選択入力画面

参考文献

- 1) 矢富盟祥, 鱈 洋一: 陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた微小変形土/水連成有限要素法解析, 応用力学論文集, vol.4, pp.345-356, 2001.
- 2) 土木学会海岸工学委員会研究現況レビュー小委員会: 海底地盤の力学挙動, 海岸波動, pp.457-459, 1994.
- 3) 例えば J. C. Simo, T.J.R.Hughes : Computational Inelasticity, Springer-Verlag New York, 1998.
- 4) R. I. Borja and S. R. Lee : Cam-Clay plasticity, Part I : Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations, *Compt. Methods Appl. Mech. Engrg.* 78(1), pp.49-72, 1990.
- 5) 富田佳宏: 数値弾塑性力学—有限要素シミュレーション—基礎と応用—, 養賢堂, 1990.
- 6) Arai, K., Ohta, H. and Kojima, K. : Estimation of Soil Parameters Based on Monitored Movement of Subsoil Under Consolidation, *Soils and Foundations*, Vol.24, No.4, pp.95-108, 1984.
- 7) Shoji, M. and Matsumoto, T. : Consolidation of Embankment Foundation, *Soils and Foundations*, Vol.16, No.1, pp.59-74, 1976.
- 8) 土質工学会: 土質調査試験結果の解釈と適用例[第1回改訂版], 土質基礎工学ライブラリー4, 第7章, 1979.
- 9) Shibata, T. and Sekiguchi, H. : Performance of Trial Embankment on Soft Clay, *Proc. of Int. Conf. on Case Histories in Geotechnical Engineering*, St. Lnuis, Vol.2, pp.599-607, 1984.
- 10) 石井武司: 三次元弾塑性解析 FEM, 実務で役立つ FEM 講習会—講義と電算実習—テキスト①, 地盤工学会, pp.19-36, 1999.
- 11) 鉄道総合技術研究所: 鉄道構造物等設計標準・同解説, 基礎構造物・抗土圧構造物 pp.85-90, 1997.
- 12) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, I 共通編, 47, 1996.
- 13) 地盤工学ハンドブック, 第3章, 土質力学, pp.124-127, 地盤工学会, 1999.
- 14) (社)日本道路協会: 道路土工, 仮設構造物設計指針など.
- 15) Chen, W. F. and Mizuno, E. : *Nonlinear analysis in soil mechanics*, Elsevier, 1990.
- 16) Owen, D. R. J. and Hinton, E. : *Finite elements in plasticity*, Pineridge Press, 1990.
- 17) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, IV 下部構造物編, pp.235-241, 1996.
- 18) 若井明彦: 地すべり解析における有限要素法の利用に関する講習会—講義と電算実習—講習会テキスト②(3次元弾塑性解析 FEM による抑止杭の解析) (社)日本地すべり学会, 2001.
- 19) Roscoe, K. H. and Poorooshasb, H. B. : A Theoretical and experimental study of strain in triaxial compression test on normally consolidated clays, *Geotechnique*, Vol. 13, No.1, pp.12-38, 1963.
- 20) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Wroth, C. P. : On the yielding of soils, *Geotechnique*, Vol. 8, pp.22-53, 1958.
- 21) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A. : Yielding of clays in states wetter than critical, *Geotechnique*, Vol.13, pp.211-240, 1963.
- 22) Ohta, H. and Hata, S. : A theoretical study of the stress-strain relation for clays, *Soils and Foundations*, Vol.11, No.3, pp.65-90, 1971.
- 23) Sekiguchi, H. and Ohta, H. Induced anisotropy and time dependency in clays, *Proc. Specialty Session 9, 9th ICSMFE*, pp.229-239, 1977.
- 24) 関口秀雄, 西田義親, 金井文男: 粘土の平面ひずみ粘塑性モデルについて, 第37回土木学会年次学術講演会概要集, 第3部, pp.181-182, 1982.
- 25) Iizuka, A. and Ohta, H. : A Determination Procedure of Input Parameters in Elasto-Viscoplastic Finite Element Analysis, *Soils and Foundations*, Vol.27, No.3, pp.71-87, 1987.
- 26) Kamei, T. , A study on the mechanical behavior of normally consolidated cohesive soils, thesis presented to the Tokyo institute of Technology at Tokyo, Japan, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor Engineering., 1985.
- 27) Kamei, T. , Dailatancy characteristics of normally consolidated cohesive soils, *Solids and Foundations*, 29, (1), 165-172, 1989.
- 28) Nakase, A. , Kamei, T. and Kusakabe, O. : Constitutive parameters estimated by plasticity index, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, 114(7), 844-858, 1988.
- 29) Kamei, T. and Sakajo, S. : Evaluation of undrained shear behavior of K_0 -consolidated cohesive soils using elasto-viscoplastic model, *Computers and Geotechnics*, Vol.17, No.3, pp.397-417, 1995.
- 30) Kamei, T. : An integrated evaluation of the mechanical behavior of normally consolidated cohesive soils, *Geological Reports of Shimane University*, No.14, pp.1-14, 1995.
- 31) Kamei, T. : Experimental and numerical investigation of the undrained shear characteristics of undisturbed clay, *Earth Science*, Vol.50, No.3, pp.213-222, 1996.
- 32) Sakajo, S. and Kamei, T. : Simplified deformation analysis for embankment foundation using elasto-plastic model, *Soils and Foundations*, Vol.36, No.2, pp.1-11, 1996.

- 33) Kamei, T. and Sakajo, S. : A deformation analysis of deep foundation under embankment using an elasto-viscoplastic model, *Journal of the Japan Society of Engineering Geology*, Vol.39, No.2, pp.183-192, 1998.
- 34) Massarsch, K. R. : Lateral Earth Pressure in Normally Consolidated Clay, *Design Parameters in Geotechnical Engineering*, 7th ECSMFE, vol.2, pp.245-249, 1979.
- 35) Kenny, T. C. : Discussion on Proc. Parameter1732, *JSMFED, Proc. ASCE*, vol.85, SM3, pp.67-79, 1959.
- 36) 鋼矢板, 鋼管杭協会・鋼矢板技術研究委員会, pp.6-7, 1989.
- 37) 鉄鋼重量ハンドブック, 鉄鋼新聞社, pp.91-92, 1995.
- 38) 地盤工学における数値解析の実務, 社団法人 土質工学会, pp.32-37, 1987.

土留丸 Version4 取り扱い説明書

2016年 1月 22日 6版1刷
著作者 五大開発株式会社
発行者 五大開発株式会社
〒921-8051 石川県金沢市黒田1丁目35番地
TEL 076-240-9587 FAX076-240-9585



五大開発株式会社

石川県金沢市黒田1丁目35番地
TEL 050-3385-3063 (直通)
FAX 076-240-9585